

Corso di Idraulica per allievi Ingegneri Civili e Ambientali

Esercitazione n° 9

Il canale rappresentato in Figura 1, composto da un primo tratto a sezione circolare di diametro D , lunghezza L_1 , pendenza i_{f1} e scabrezza di Strickler k_{s1} , e da un secondo tratto a sezione rettangolare di larghezza b_0 , pendenza i_{f2} e scabrezza di Strickler k_{s2} è alimentato da un serbatoio, il cui pelo libero è posto a quota E_0 rispetto al fondo del canale nella sezione di imbocco. Sul canale rettangolare, a distanza L_p dal cambio di sezione, è posta una paratoia piana, di larghezza pari alla larghezza b_0 del canale, la cui luce ha altezza a , oltre la quale il canale è indefinito verso valle.

Si richiede di:

- 1) determinare il tipo dei canali (se a debole o forte pendenza) e la portata estratta dal serbatoio;
- 2) verificare le condizioni di efflusso sotto la paratoia (libero o rigurgitato).
- 3) tracciare i profili di moto permanente nei due tratti di canale;
- 4) determinare il valore minimo dell'altezza della luce sotto la paratoia, a_{lim} , oltre il quale l'efflusso è rigurgitato, e determinare i profili di moto permanente per $a' = 1.1 a_{lim}$.

Dati:

- | | | | |
|-----------------------------------|-------------------------|--|--------------------|
| – $D = 3.50 \text{ m}$ | – $L_1 = 300 \text{ m}$ | – $k_{s1} = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ | – $i_{f1} = 0.01$ |
| – $b_0 = 3.50 \text{ m}$ | – $L_p = 700 \text{ m}$ | – $k_{s2} = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ | – $i_{f2} = 0.002$ |
| – $E_0 = 3.0 \text{ m}$ | – $\mu = 0.6$ | – $a = 1.5 \text{ m}$ | – $C_c = 0.61$ |
| – $\gamma = 9806 \text{ Nm}^{-3}$ | | | |

Avviamento alla soluzione

1. Le modalità della determinazione della portata estratta differiscono a seconda che il primo tratto del canale sia a debole o a forte pendenza. Essendo la portata incognita, la determinazione sia della portata che del tipo dei canali va effettuata per tentativi. Se il primo tratto del canale è a forte pendenza, sulla sezione di imbocco del canale si stabilisce la profondità critica e la portata estratta è la massima possibile con il carico rispetto al fondo E_0 . La profondità critica si determina risolvendo graficamente, per tentativi o mediante il solutore di un foglio di calcolo¹, l'equazione:

$$E_0 = Y_c + \frac{1}{2} Y_{mc} = Y_c + \frac{\Omega_c}{2b_c}.$$

La portata massima si calcola dalla:

$$Q_{\max} = \Omega_c \sqrt{2g(E_0 - Y_c)}.$$

Determinati la profondità critica e la corrispondente portata massima, si determina la profondità di moto uniforme nel primo tratto dalla scala delle portate di moto uniforme, o per via grafica, come illustrato in Figura 1, ovvero risolvendo per tentativi l'equazione di Chezy:

¹ In Microsoft Excel™ si possono utilizzare le funzioni "Risolutore" o "Ricerca obiettivo"; in MathCad™ la funzione "solve". Nel prosieguo, ovunque si indichi una soluzione da ottenere "per tentativi", si intende senz'altro che essa possa determinarsi anche graficamente o mediante un solutore automatico.

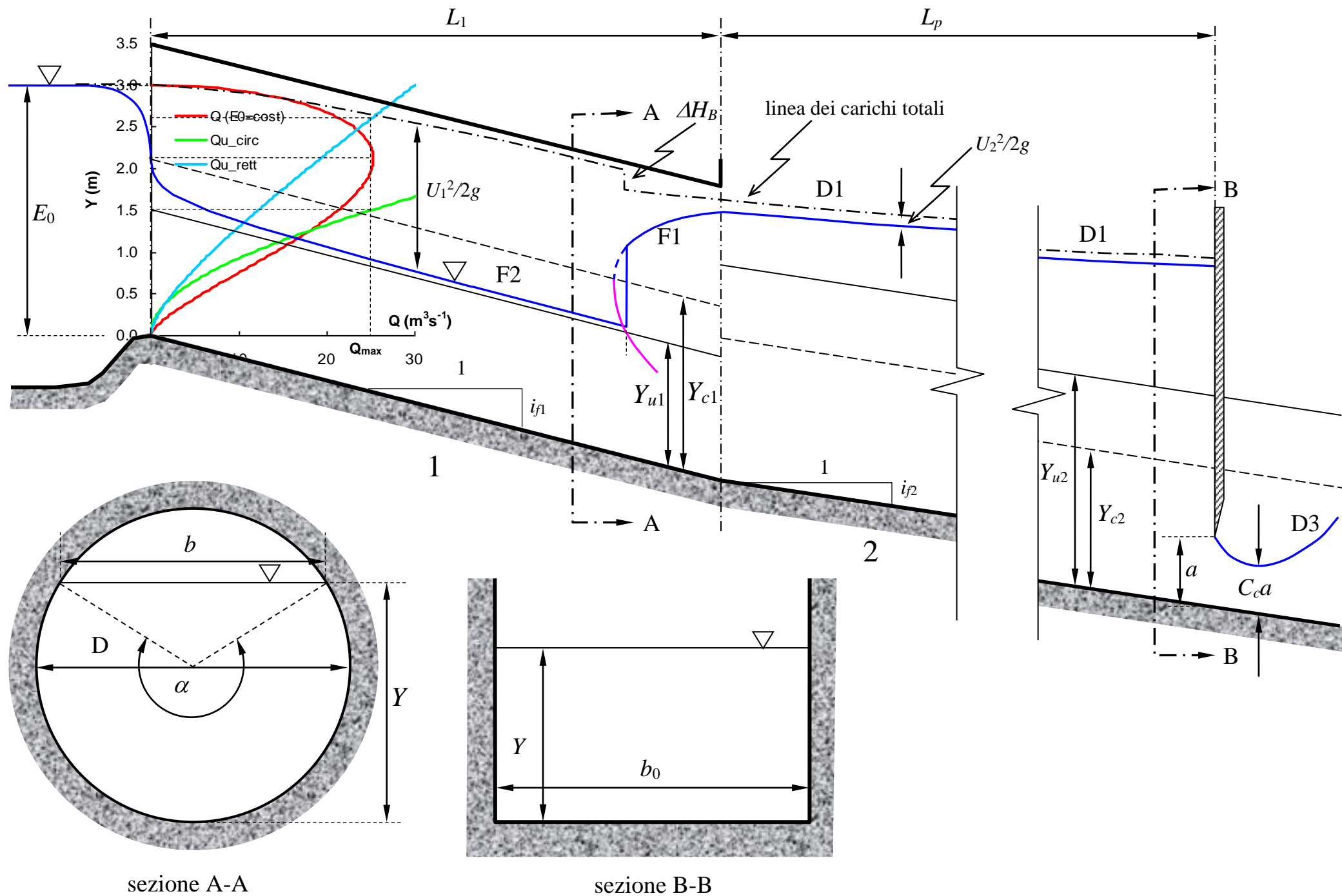


Figura 1. Sezione longitudinale e sezioni trasversali di un canale a pelo libero.

$$i_f = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} = \frac{Q_{\max}^2}{\chi^2 \Re \Omega^2} , \quad (1)$$

nella quale il coefficiente di Chezy, χ , può esprimersi mediante la formula di Manning-Gauckler-Strickler:

$$\chi = k_s \Re^{1/6} .$$

Con riferimento allo schema di Figura 1, per quanto concerne la sezione circolare, le espressioni analitiche delle varie grandezze in funzione della profondità Y sono le seguenti:

$$b(Y) = D \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\Omega(Y) = \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{1}{2} b \left(\frac{D}{2} - Y \right) = \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{D}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right)$$

$$\alpha(Y) = 2 \arccos \left(\frac{D/2 - Y}{D/2} \right)$$

$$B(Y) = \frac{\alpha}{2} D$$

$$\Re(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right)$$

$$\chi(Y) = k_s \Re^{1/6} = k_s \left[\frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right) \right]^{1/6}$$

$$U(Y) = \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \Re^{2/3} \sqrt{i_f} = k_s \left[\frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right) \right]^{2/3} \sqrt{i_f}$$

$$Q(Y) = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \left[\frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{D}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right) \right] \left[\frac{D}{4} - \frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{D}{2} - Y \right) \right]^{2/3} \sqrt{i_f} .$$

Il procedimento è corretto se l'alveo è effettivamente a forte pendenza. Occorre pertanto verificare che risulti:

$$Y_{u1} < Y_{c1} .$$

In tali condizioni, la curva rappresentativa della scala delle portate di moto uniforme interseca la curva delle portate a carico specifico costante nel ramo delle correnti veloci (vedi Figura 1).

I dati del problema determinano una verifica positiva².

² In un caso diverso, in cui l'alveo risultasse a debole pendenza, la determinazione della portata effluente dal serbatoio dovrebbe essere effettuata per iterazioni successive, assumendo, alla prima iterazione, che nella sezione di imbocco vigano le condizioni di moto uniforme. Qualora, tracciati i profili di moto permanente, in tale sezione si ritrovi una profondità sufficientemente prossima a quella di moto uniforme, la prima determinazione è corretta ed il procedimento non prevede iterazioni. In caso contrario, si determina un secondo valore di portata in funzione della profondità calcolata, dalla relazione che esprime la portata a carico specifico costante, si tracciano nuovamente i profili di moto permanente, e si prosegue in questo modo, per iterazioni successive, fino a che due valori successivi di profondità

Successivamente, occorre determinare la profondità di moto uniforme e la profondità critica per l'alveo rettangolare per il medesimo valore di portata Q_{max} . La profondità di moto uniforme si ottiene risolvendo ancora la (1), utilizzando le seguenti relazioni:

$$b = b_0 = \text{cost}$$

$$\Omega(Y) = bY$$

$$B(Y) = b + 2Y$$

$$\Re(Y) = \frac{\Omega}{B} = \frac{bY}{b + 2Y}$$

$$\chi(Y) = k_s \Re^{1/6} = k_s \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{1/6}$$

$$U(Y) = \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s \Re^{2/3} \sqrt{i_f} = k_s \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{2/3} \sqrt{i_f}$$

$$Q(Y) = \Omega \chi \sqrt{\Re i_f} = k_s bY \left(\frac{bY}{b + 2Y} \right)^{5/3} \sqrt{i_f} .$$

La profondità critica si ricava dall'espressione esplicita:

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

Sulla base di tali valori si può verificare il tipo di alveo. I dati del problema determinano un alveo a debole pendenza.

2. A valle della sezione contratta che si produce a breve distanza dalla paratoia piana si stabilisce un profilo di corrente veloce ritardata D3. Il profilo deve raccordarsi mediante un risalto idraulico al profilo di moto uniforme, costituente la condizione al contorno da valle in un alveo indefinito a debole pendenza. Introdotta la spinta totale ridotta della corrente:

$$\Sigma(Y) = \frac{S(Y)}{\gamma} = \zeta_G \Omega + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{\Omega} ,$$

che per una sezione rettangolare assume la forma specifica:

$$\Sigma(Y) = \frac{1}{2} b_0 Y^2 + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{b_0 Y} ,$$

in cui γ è il peso specifico dell'acqua, ζ_G l'affondamento rispetto al pelo libero del baricentro della sezione liquida di area Ω ed $S(Y)$ la spinta totale, il profilo D3 si sviluppa effettivamente se la spinta totale corrispondente alla profondità nella sezione contratta è maggiore della spinta totale corrispondente alla profondità di moto uniforme. In tal caso l'efflusso è libero, la quota piezometrica della sezione contratta è data dalla corrispondente quota del pelo libero e la legge di efflusso assume la forma:

all'imbocco del canale (o di portata estratta, a seconda di quale sia il dato di interesse applicativo) presentino uno scarto inferiore ad una tolleranza prefissata (p.es. l'1%).

$$Q = b_0 \sqrt{\frac{2g(Y_m - C_c a)}{\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{Y_m^2}}}, \quad (2)$$

nella quale Y_m è la profondità a monte della paratoia, $\mu = C_c C_v$ è il coefficiente di efflusso, C_c il coefficiente di contrazione, C_v il coefficiente correttivo della velocità. La legge di efflusso tiene conto della velocità di arrivo della corrente.

In caso contrario, l'efflusso è rigurgitato e la quota piezometrica nella sezione contratta è data dalla quota del pelo libero corrispondente alla profondità di moto uniforme:

$$Q = b_0 \sqrt{\frac{2g(Y_m - Y_{u2})}{\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{Y_m^2}}}, \quad (3)$$

col che la profondità a monte della paratoia assume un valore maggiore rispetto al caso di efflusso libero. In entrambi i casi, tale profondità, certamente di corrente lenta perché determinata da una causa perturbatrice (la paratoia) posta a valle rispetto ad essa, va determinata per tentativi. I dati del problema determinano un efflusso libero.

3. Dalla sezione di imbocco ha origine un profilo di corrente veloce accelerata di tipo F2, da tracciare da monte verso valle, sulla base della condizione al contorno di profondità critica. La profondità di corrente lenta Y_m a monte della paratoia costituisce la condizione al contorno per il tracciamento di un profilo di rigurgito D1. Il tracciamento dei profili si esegue alle differenze finite, calcolando le variazioni dell'ascissa s fra sezioni di altezza nota mediante l'espressione:

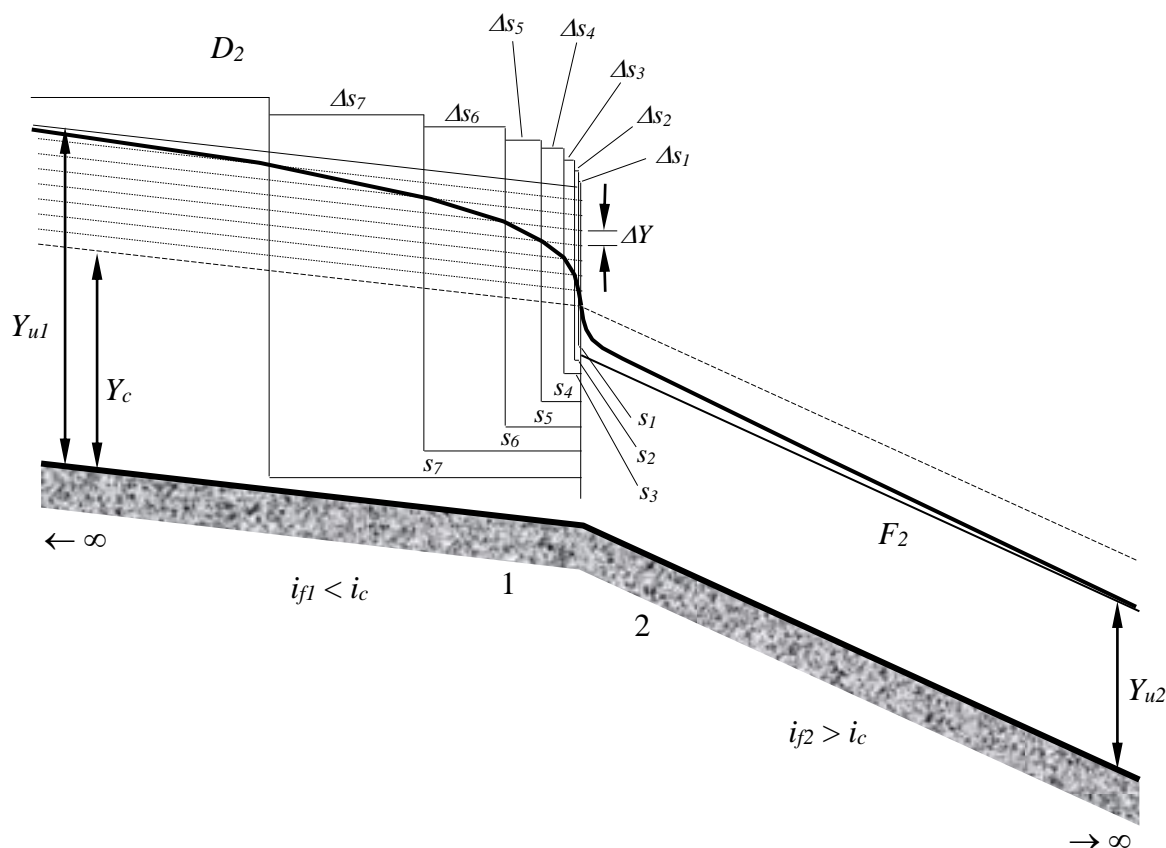


Figura 2. Schema di calcolo di un profilo di moto permanente di tipo D2 (esemplificativo).

$$\Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{i_f - \bar{j}_k} = \frac{E_{k+1} - E_k}{i_f - \bar{j}_k} \quad (4)$$

A tale scopo, il dislivello noto fra gli estremi di ciascun profilo (ad esempio, la differenza fra profondità critica e profondità di moto uniforme per un profilo F2, o anche per un profilo D2 come quello rappresentato, a puro scopo illustrativo, in Figura 2) si suddivide in un certo numero K di parti uguali ΔY , in corrispondenza dei quali si determinano le profondità $Y_0, Y_1 = Y_0 \pm \Delta Y, Y_2 = Y_0 \pm 2\Delta Y, \dots, Y_k = Y_0 \pm k\Delta Y, \dots, Y_K = Y_0 \pm K\Delta Y$, in cui si prenderà il segno "+" o "-" a seconda del tipo di profilo (p.es.: $Y_0 = Y_c, Y_k = Y_0 - k\Delta Y$ e $Y_K = Y_{u1}$ per il profilo F2 nel primo tronco, da tracciare da monte verso valle; segno "-" anche per i profili D1, F1; segno "+" per i profili D2, D3, F3). Le variazioni Δs_k fra le sezioni di profondità Y_k e Y_{k+1} risultano positive per una corrente veloce (il cui profilo si traccia da monte verso valle); risultano negative per una corrente lenta (profilo tracciato da valle verso monte, come è il caso dell'esempio di Figura 2).

Il valore medio della cadente dei carichi totali nel tratto di sviluppo Δs_k , che compare nella (4), può calcolarsi sulla base della formula di Chezy

$$j = \frac{Q^2}{\chi(Y)^2 \Re(Y) \Omega(Y)^2},$$

in uno dei modi seguenti:

- a) in funzione di un valore di profondità media nel tratto: $Y_{km} = (Y_k + Y_{k+1})/2$;
- b) in funzione di valori medi di area, raggio idraulico e coefficiente di Chezy: $\Omega_{km} = (\Omega_k + \Omega_{k+1})/2, \Re_{km} = (\Re_k + \Re_{k+1})/2, \chi_{km} = (\chi_k + \chi_{k+1})/2$;
- c) come media aritmetica delle cadenti calcolate nelle due sezioni estreme del tratto: $j_{km} = (j_k + j_{k+1})/2; j_k = j(Y_k)^3$,

Analogamente, i valori del carico specifico si calcolano come:

$$E_k = Y_k + \frac{Q^2}{2g\Omega^2(Y_k)}; \quad k = 0, \dots, K.$$

Il profilo di corrente veloce F2 originato all'imbocco ed il profilo di corrente lenta D1 originato a monte della paratoia devono raccordarsi mediante un risalto idraulico. Allo scopo di determinar la posizione del risalto, occorre preventivamente stabilire in quale dei due tronchi esso debba localizzarsi. A tale scopo, si valutano le spinte totali ridotte delle due correnti nella sezione comune, di passaggio dal primo al secondo tronco. Nel calcolo della spinta totale nell'alveo a sezione circolare, occorre valutare l'affondamento del baricentro della sezione mediante la regola per le sezioni composite⁴; si ottiene così:

$$\zeta_G = Y - \frac{D}{2} + \frac{\frac{D^2 \sin(\alpha/2)}{12} - \frac{1}{3} \sin(\alpha/2) \left(\frac{D}{2} - Y\right)^2}{\frac{D\alpha}{8} - \frac{1}{2} \sin(\alpha/2) \left(\frac{D}{2} - Y\right)}$$

³ Utilizzando un foglio di calcolo, il secondo ed il terzo modo di calcolare il valore medio della cadente evitano di dover replicare il calcolo di varie grandezze in corrispondenza dei valori medi delle profondità. Da un punto di vista della accuratezza formale del calcolo, i tre metodi sono sostanzialmente equivalenti.

⁴ Nel caso di sezione circolare, la sezione liquida può essere vista come differenza fra un settore circolare ed un triangolo per $Y < D/2$ e come unione di un settore circolare ed un triangolo per $Y > D/2$.

Dette Σ_m e Σ_v le spinte ridotte rispettivamente della corrente veloce da monte e della corrente lenta da valle, se risulta $\Sigma_m < \Sigma_v$ il risalto si localizza (e va quindi ricercato) nel primo tronco, tracciando un profilo F1 a partire dalla profondità della corrente lenta da valle; in caso contrario il risalto va ricercato nel secondo tronco, tracciando un profilo D3 a partire dalla profondità della corrente veloce da monte. Trattandosi di un risalto interposto fra due profili entrambi differenti da quello di moto uniforme, la posizione del risalto va determinata tracciando il profilo coniugato ad uno dei due e determinandone l'intersezione con il secondo profilo (vedi Figura 1). La ricerca della posizione del risalto può essere anche effettuata numericamente su un foglio di calcolo, ricercando due sezioni contigue nelle quali si inverta il segno della differenza delle spinte totali ridotte dei due profili.

4. L'efflusso sotto la paratoia è libero se la spinta totale in corrispondenza della sezione contratta è maggiore del valore corrispondente alla profondità di moto uniforme. Il valore limite cercato è pertanto quel valore a_{min} tale che l'altezza nella sezione contratta, $C_c a_{min}$, sia la profondità coniugata alla profondità di moto uniforme, Y_u^* . Tale altezza coniugata può individuarsi sul diagramma delle spinte totali, come illustrato in Figura 3, ovvero risolvendo per tentativi l'equazione:

$$\zeta_G \Omega + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{\Omega} = \Sigma_{u2} ,$$

in cui $\Sigma_{u2} = \Sigma(Y_{u2})$ è la spinta totale ridotta della corrente di moto uniforme. Trattandosi della sezione rettangolare, l'equazione assume la forma specifica:

$$\frac{1}{2} b_0 Y^2 + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{b_0 Y} = \frac{1}{2} b_0 Y_{u2}^2 + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{b_0 Y_{u2}} .$$

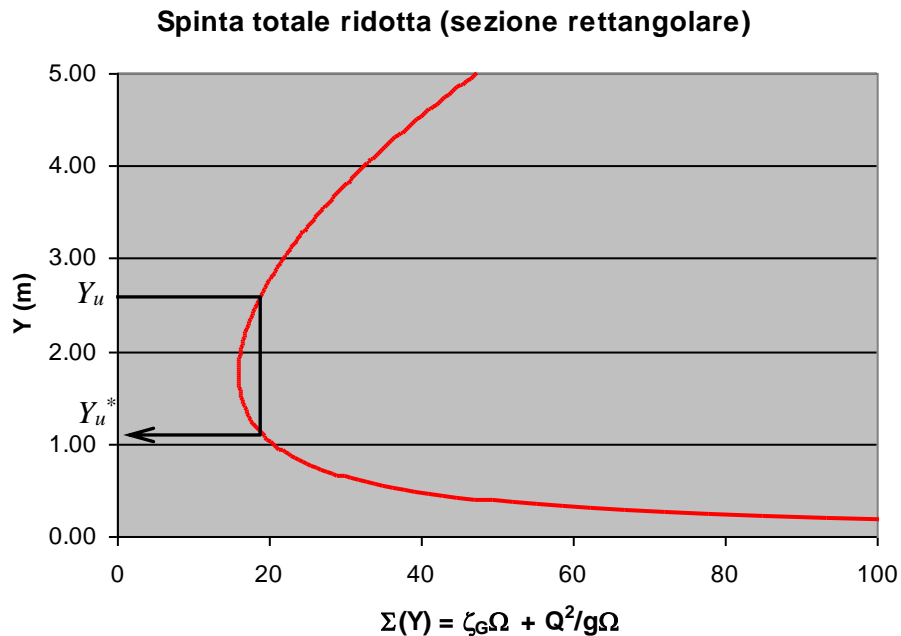


Figura 3. Determinazione della profondità coniugata alla profondità di moto uniforme nel tronco 2.

Volendo utilizzare un solutore automatico per la ricerca della profondità coniugata relativa ad una corrente veloce, si dovrà prescrivere un valore iniziale della profondità incognita inferiore all'altezza critica.

Determinata la profondità coniugata, si calcola:

$$a_{\text{lim}} = \frac{Y_u^*}{C_c}.$$

Per un'altezza della luce $a' = 1.1 a_{\text{lim}}$ si determina il livello a monte della paratoia mediante la (3), costituente la condizione al contorno da valle per il tracciamento di un nuovo profilo di corrente lenta D1. Il raccordo al profilo di corrente veloce che si instaura nel primo tronco si determina con procedimento analogo a quello descritto al punto 3.