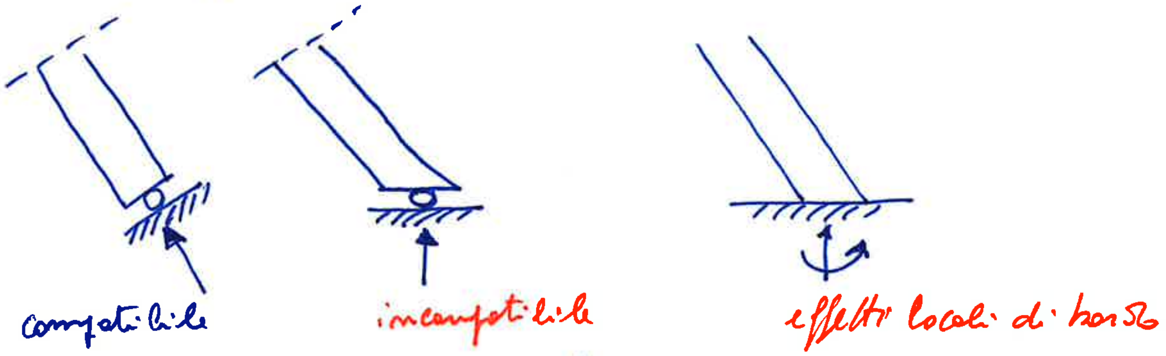
11.12.23

GUSCI : TEORIA MEMBRANALE (da BLAAUWENDRAAD)

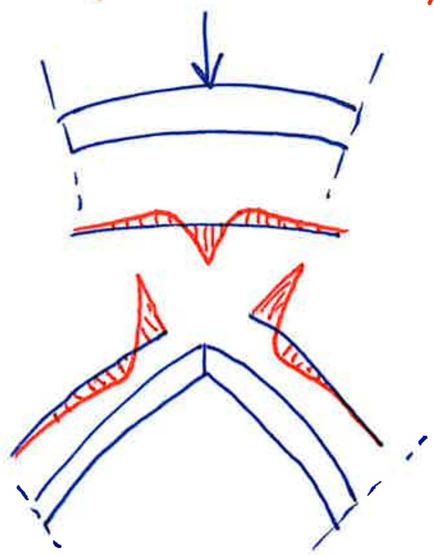
Teorie membranale per gusci con curvature principali

L'assunto di base è che un guscio sottile produce un campo di sforzo puramente membranale. Ciò è possibile se si considerano alcune condizioni al contorno e di carico:

- condizioni al contorno incompatibili con le richieste di un campo puramente membranale



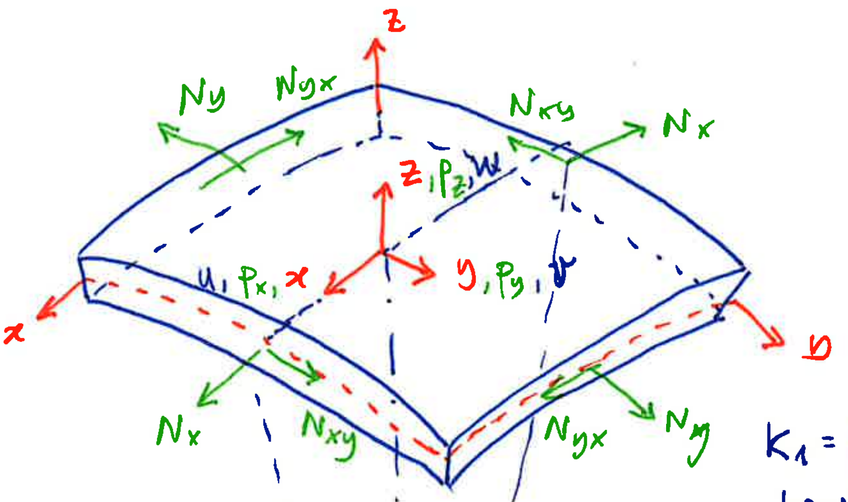
- carichi concentrati
- cambi di geometria



Quindi gli sforzi di flessione, torsione e taglio non sono considerati!

Consideriamo un guscio di curvatura arbitraria e scegliamo un riferimento di assi x, y, z con gli assi x e y orientati lungo i piani delle curvature principali: il raggio di curvatura lungo x è r_1 e quello lungo y è r_2. L'asse z è ortogonale alla superficie media. In questo modo le curvature sempre negative per la scelta dell'asse z.

11.12.23



$N_{xy} = N_{yx}$

$K_1 = \frac{1}{r_1} < 0$ perché z è positivo verso l'alto!

(p_x, p_y, p_z) carico distribuito
(u, v, w) spostamenti dei punti appartenenti alla superficie media

Le uniche componenti di sforzo che consideriamo nel problema membranale sono:

σ_x, σ_y e τ_{xy}

che, se integrate lungo lo spessore del guscio, producono le seguenti azioni interne:

N_x, N_y e N_{xy}.

Alle azioni membranali corrispondono le componenti di deformazione: ε_x, ε_y, γ_{xy}. Si possono definire come per le piastre dei vettori

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \; ; \; \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \; ; \; \vec{S} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix}$$

Questi vettori sono collegati tra loro da: relazioni cinematiche, legame costitutivo ed equazioni d'equilibrio.

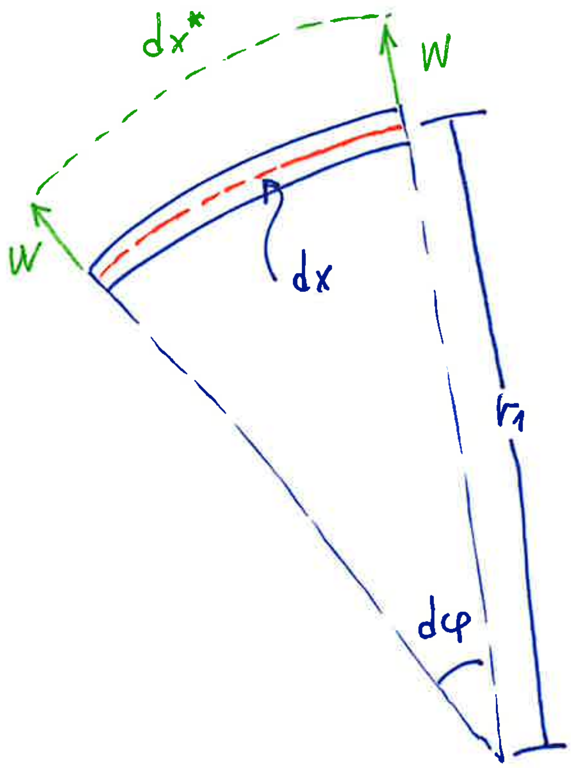
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\text{cinematica}]{} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\text{legame costitutivo}]{} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\text{equazioni d'equilibrio}]{} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che gli spostamenti u e v sono spostamenti tangenti alla superficie media nella direzione delle curvature principali k_1 e k_2, mentre W è in direzione z.

Si ha che:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

In che modo contribuisce lo spostamento w?



$dx^* > dx$

$dx = r_1 \, d\varphi$

Quindi si ha che ε_x può essere scritto come

$$\varepsilon_x = \frac{dx^* - dx}{dx}$$

$$= \frac{(r_1 + w)\, d\varphi - r_1\, d\varphi}{r_1\, d\varphi}$$

$$= \frac{\cancel{r_1\, d\varphi} + w\, d\varphi - \cancel{r_1\, d\varphi}}{r_1\, d\varphi} = \frac{w\, \cancel{d\varphi}}{r_1\, \cancel{d\varphi}}$$

$$= \frac{W}{r_1} = -k_1 W$$

Lo stesso ragionamento vale anche in direzione y, e si ottiene

$$\varepsilon_y = \frac{W}{r_2} = -k_2 W$$

Perché il sistema di riferimento è orientato secondo le direzioni principali, allora γ_{xy} non è influenzato da w.

Bisogna tenere conto quindi del contributo dovuto a w:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w$$

LEGAME COSTITUTIVO

11.12.23

Consideriamo un materiale lineare elastico isotropo, che quindi obbedisce alla legge di Hooke. Esso è descritto dalle solite equazioni

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy}$$

Integrando sullo spessore t in dz si ottiene

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \approx \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \, dz = \sigma_x t$$

ipotesi di guscio sottile e teoria membranale $t/r \ll 1$

In termini di matrice si può scrivere

$\vec{s} = \underline{\underline{D}}\,\vec{e}$ $\qquad$ $\underline{\underline{D}}$ matrice di rigidezza

$$\underline{\underline{D}} = \frac{Et}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

EQUILIBRIO

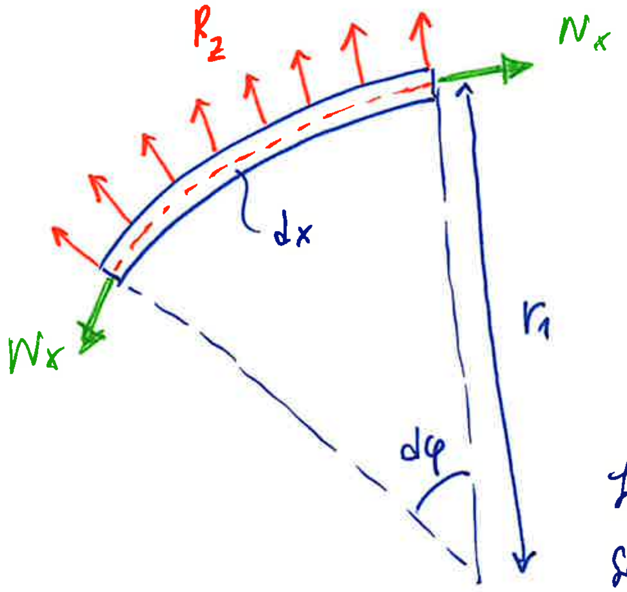
Poiché abbiamo tre gradi di libertà, allora le equazioni di equilibrio devono essere tre. Le due equazioni per le componenti di carico tangenti alla superficie media, p_x e p_y, sono le stesse di una piastra piana

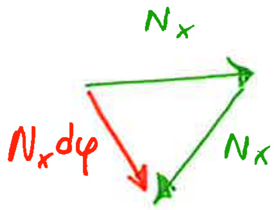
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0$$

Per determinare la terza equazione osserviamo p_z su un pezzo di guscio

11.12.23





$$p_z\, dx = p_z\, r_1\, d\varphi$$

Le condizioni d'equilibrio sarà allora:

$$-N_x \cancel{d\varphi} + p_z r_1 \cancel{d\varphi} = 0$$

$$K_1 = -\frac{1}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_1 N_x + p_z = 0}$$

Si può fare una discussione simile a quella per una striscia in direzione y, con

$$dx = r_1\, d\varphi \qquad e \qquad dy = r_2\, d\vartheta$$

Il carico agisce sull'area $dx\,dy = r_1 d\varphi \cdot r_2 d\vartheta$, mentre l'azione membranale N_x agisce su una faccia di lunghezza dy. Quindi l'equazione completa in direzione z è

$$-N_x r_2 d\vartheta \cdot d\varphi - N_y r_1 d\varphi \cdot d\vartheta + p_z r_1 d\varphi \cdot r_2 d\vartheta = 0$$

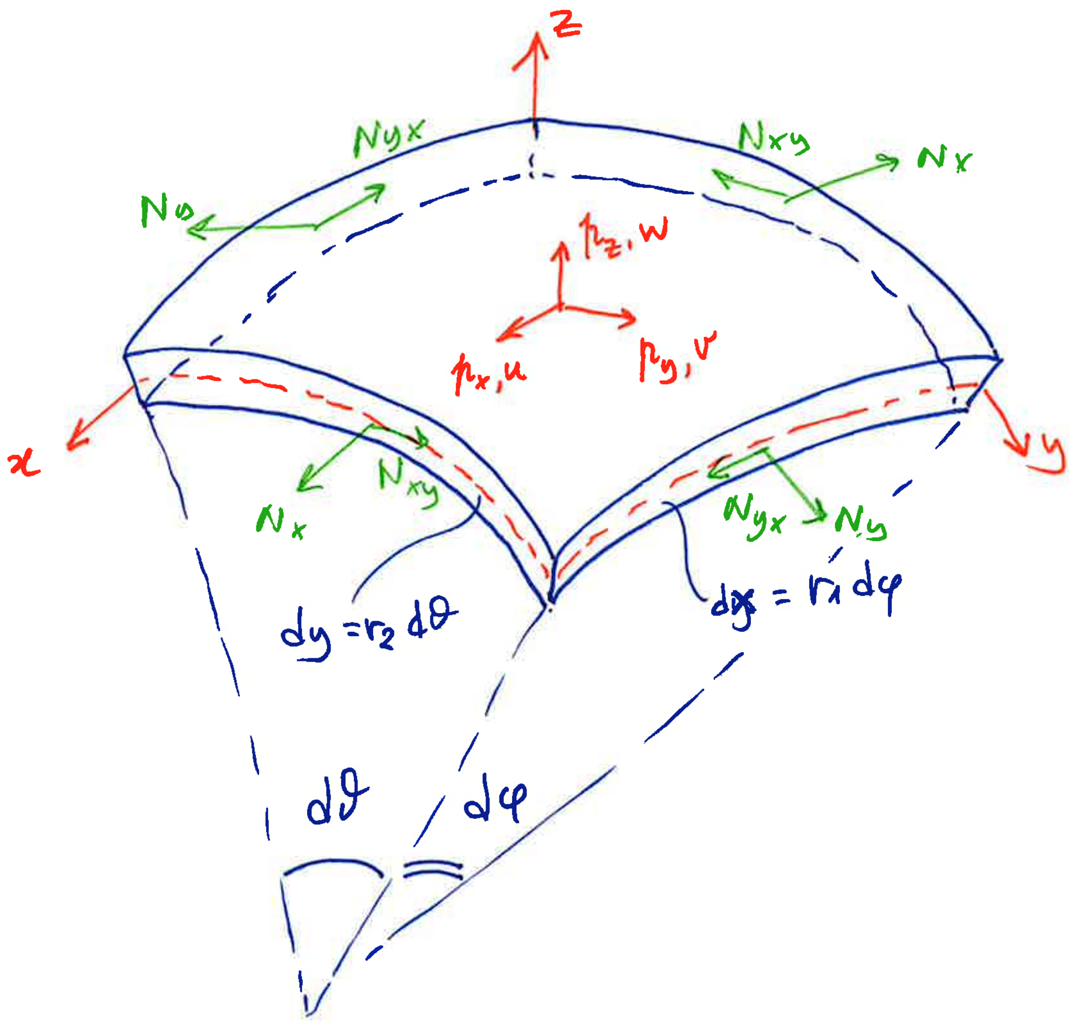
dividendo per l'area si ottiene

$$-N_x \cdot \frac{1}{r_1} - N_y \cdot \frac{1}{r_2} + p_z = 0$$

$$\boxed{k_1 N_x + k_2 N_y + p_z = 0}$$

che rappresenta la terza equazione d'equilibrio ricercata.

11.12.23



z
Nyx
Nxy
Nx
Nx
p_z, w
p_x, u
p_y, v
x
y
Nx
Nxy
Nyx
Ny
$dy = r_2 d\vartheta$
$dx = r_1 d\varphi$
$d\vartheta$
$d\varphi$