② 11.12.23

TEORIA MEMBRANALE PER GUSCI SOTTILI CON CURVATURA ARBITRARIA

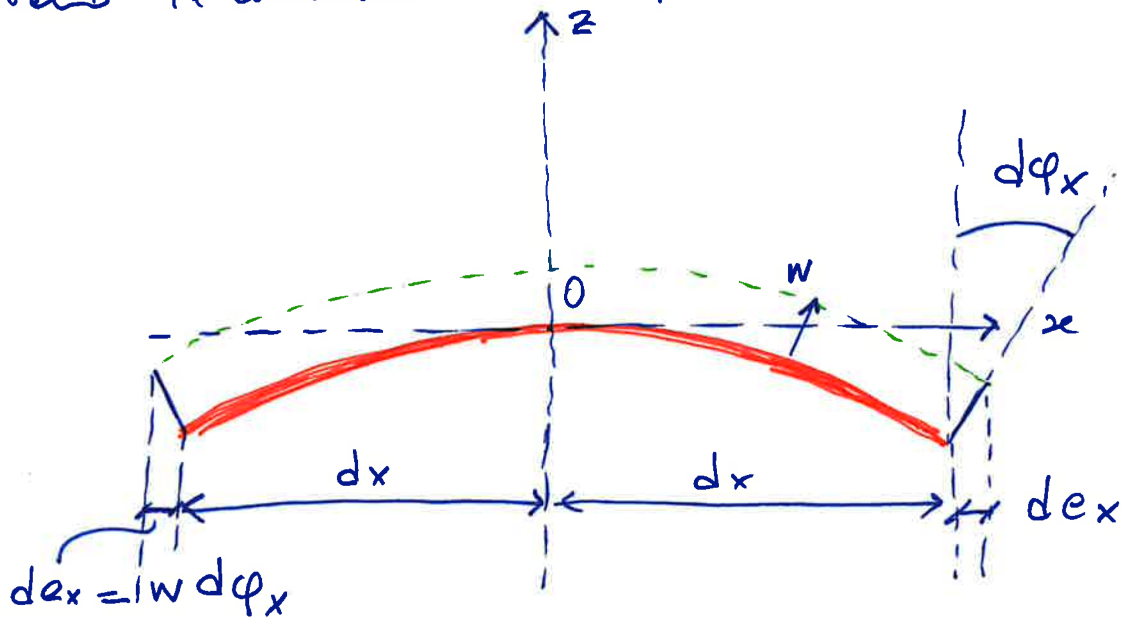
Adesso scegliamo un riferimento con gli assi x e y non orientati lungo i piani principali. Invece delle curvature k_1 e k_2 avremo allora k_x e k_y e in aggiunta definiremo un'ulteriore quantità che chiameremo twist k_{xy}.

CINEMATICA

Le componenti di deformazioni si scrivono ancora come prima

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Studiamo il contributo dello spostamento trasversale w:



dove φ_x è l'inclinazione, quindi $\varphi_x = -\frac{\partial z}{\partial x}$ e

$$d\varphi_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$$

mentre le variazioni di lunghezza $de_x = w\, d\varphi_x$ si può scrivere come

$$de_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \cdot w$$

La dilatazione sulla superficie media sarà quindi

$$\varepsilon_x = \frac{de_x}{dx} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot w$$

Ricordiamo che avevamo scritto $\varepsilon_x = -k_x w$

Quindi la curvatura in questo caso vale

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

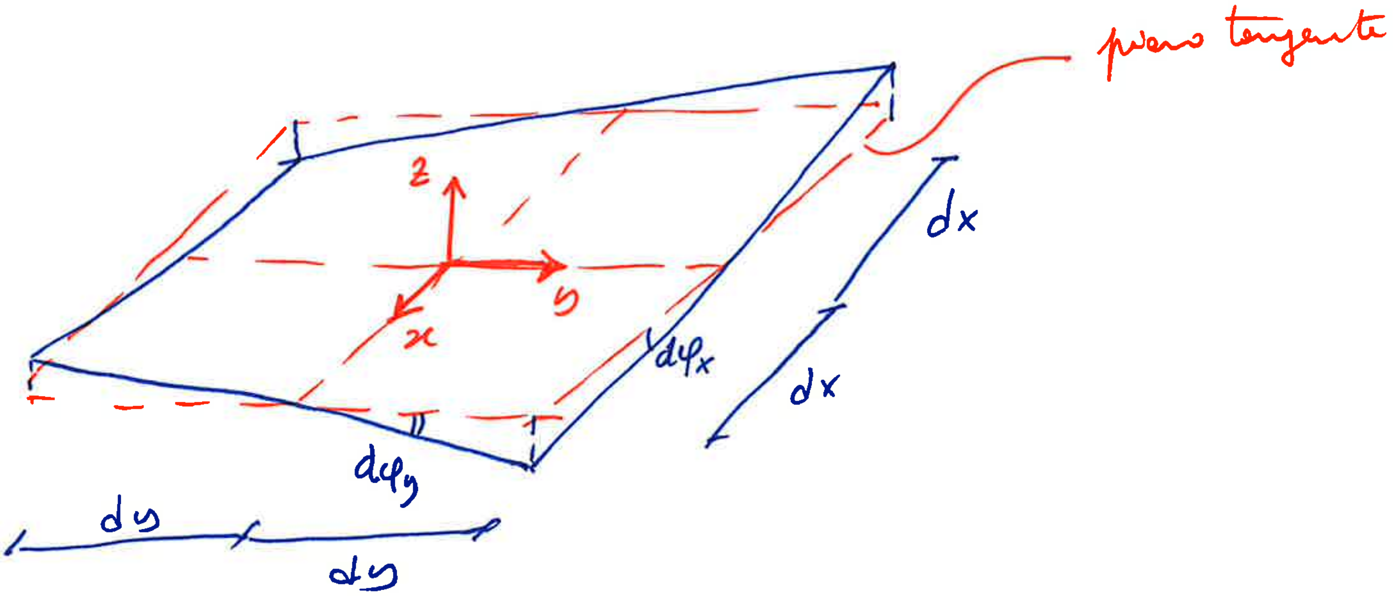
Allo stesso modo si ottiene

$$k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

e

$$d\varphi_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx \quad e \quad d\varphi_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dy$$

Adesso studiamo un pezzo infinitesimo di genere "twisted"



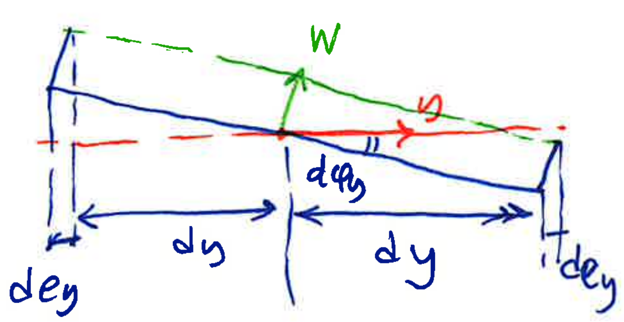
Introduciamo le inclinazioni

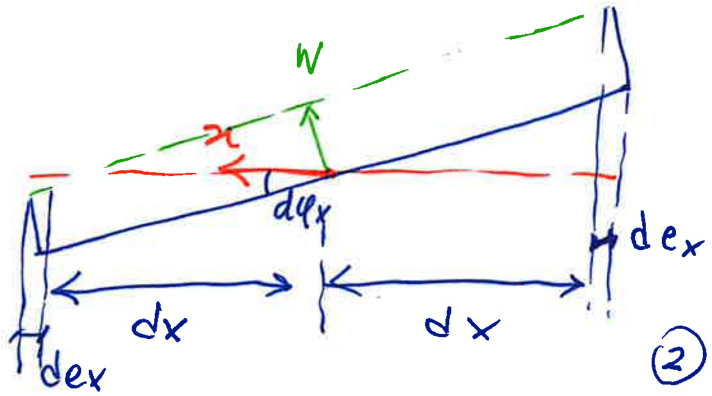
$$\varphi_x = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad e \quad \varphi_y = -\frac{\partial z}{\partial y}$$

e le loro variazioni incrementali sono (in direzioni alternate)

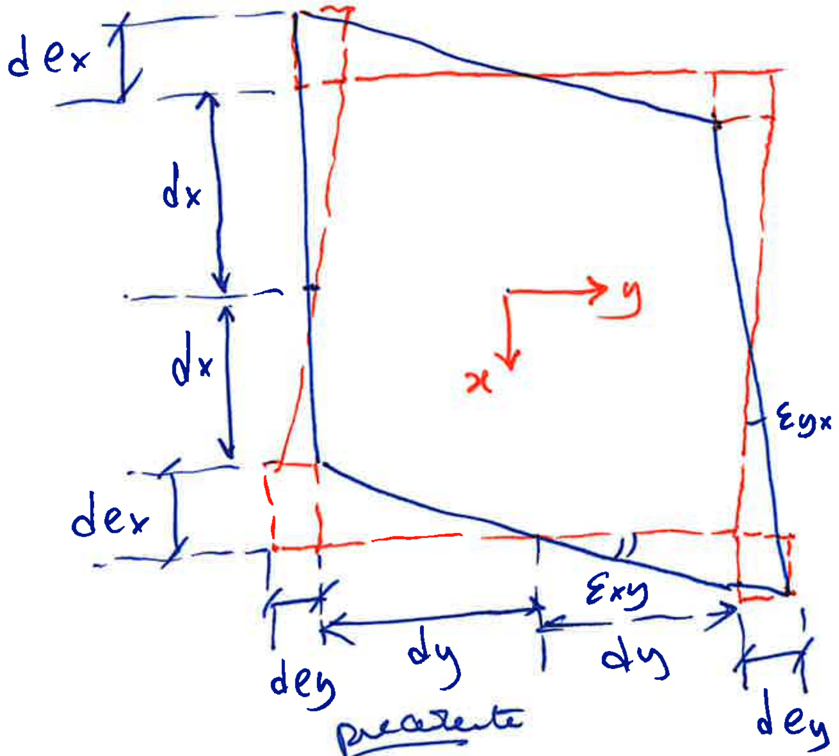
$$d\varphi_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dy \quad e \quad d\varphi_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dx$$

Per il teorema di SCHWARZ si ha che $d\varphi_x = d\varphi_y$





Per studiare le deformazioni di taglio, consideriamo la piastra dall'alto:



$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}$$

Dalla ~~seguente~~ precedente figura si deduce che

$$de_x = d\varphi_x w \quad e \quad de_y = d\varphi_y w$$

mentre da questa si vede che

$$\varepsilon_{xy} = \frac{de_x}{dy} \quad e \quad \varepsilon_{yx} = \frac{de_y}{dx}$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{de_x}{dy} + \frac{de_y}{dx}$$

$$= w\frac{d\varphi_x}{dy} + w\frac{d\varphi_y}{dx}$$

$$= -w\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - w\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$= -2w\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2k_{xy}w$$

dove $\boxed{k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$ è detto twist.

11.12.23

Quindi abbiamo introdotto le seguenti curvature

$$k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; ; \quad k_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \; ; \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

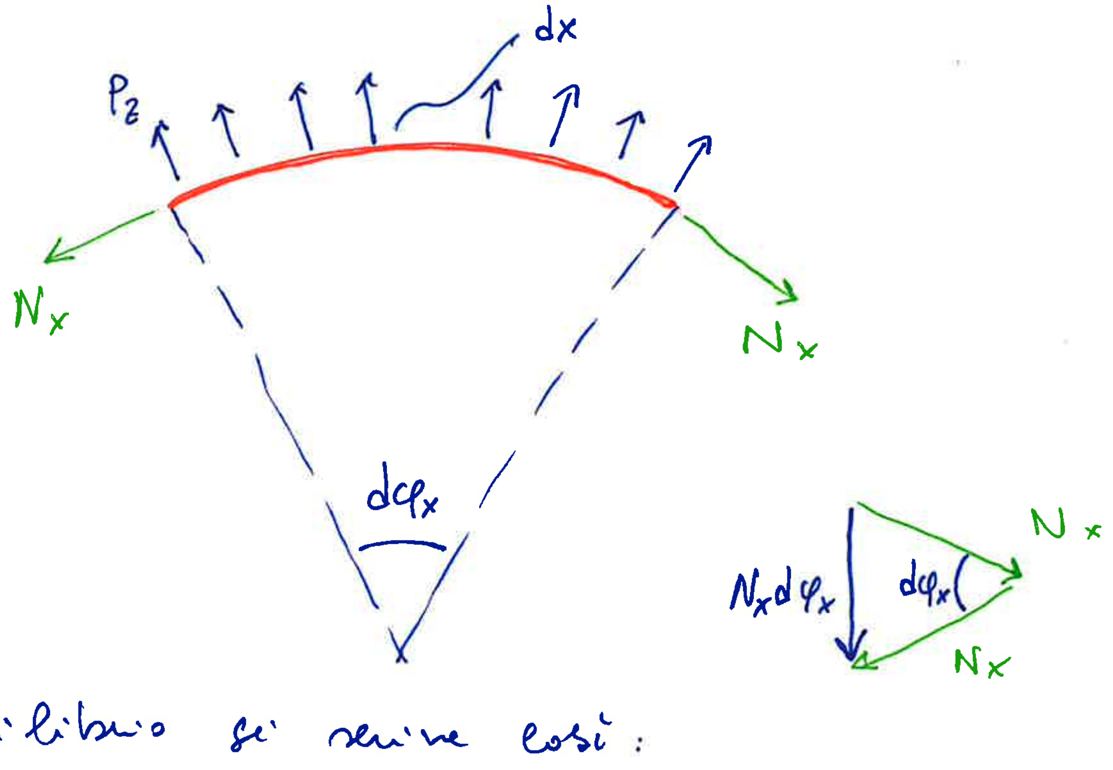
Il legame costitutivo è lo stesso che abbiamo già discusso, anche le prime due equazioni d'equilibrio

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0$$

Terza equazione d'equilibrio: effetto delle curvature e del twist

Primo passo: consideriamo una striscia di guscio di spessore unitario e lunghezza dx; l'ampiezza angolare è $d\varphi_x$:



L'equilibrio si scrive così:

$$p_z \, dx - N_x \, d\varphi_x = 0$$

Ricordo che $d\varphi_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$ e $k_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Allora

$$p_z \, dx + N_x k_x \, dx = 0 \Rightarrow \boxed{k_x N_x + p_z = 0}$$

12.12.23

Allo stesso modo si ottiene lo stesso risultato per una striscia di guscio in direzione y:

$$p_z dy - N_y d\varphi_y = 0$$

$$\boxed{k_y N_y + p_z = 0}$$

Queste due equazioni possono essere combinate considerando una porzione di guscio di grandezza dx lungo x e dy lungo y

Allora le risultanti saranno sui bordi:

$N_x d\varphi_x$ su dy e $N_y d\varphi_y$ su dx, p_z sull'area dxdy

Quindi:

$$p_z dx dy - N_x d\varphi_x dy - N_y d\varphi_y dx = 0$$

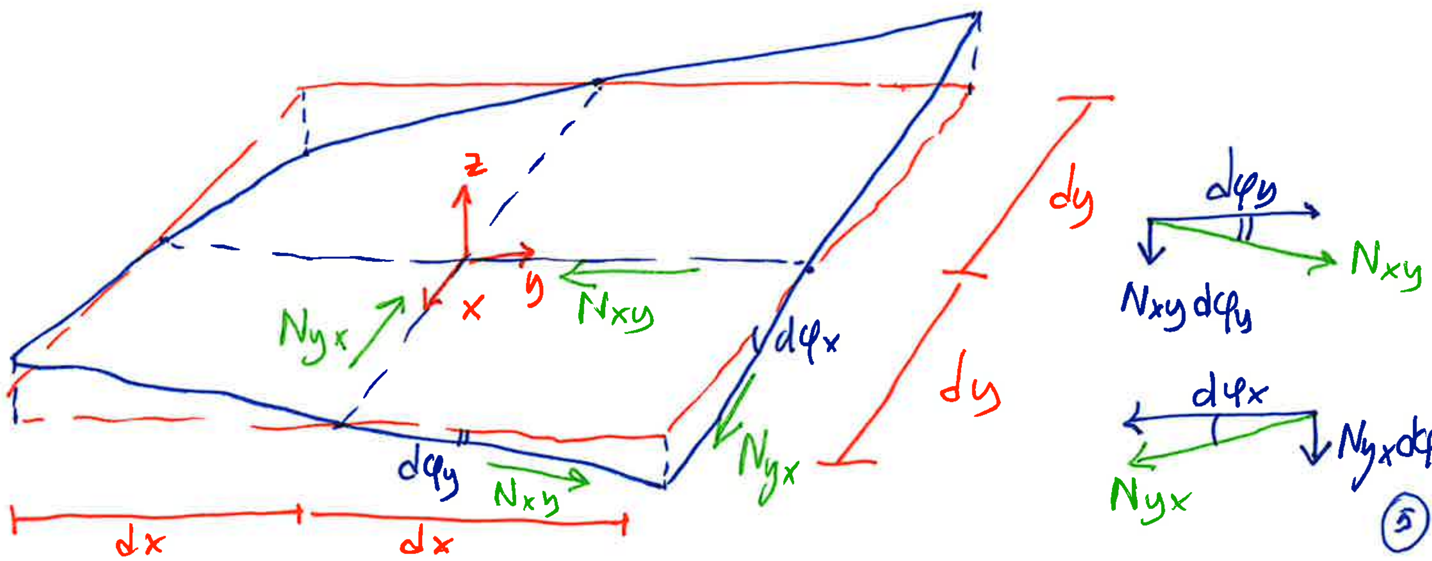
Che si riscrive facilmente come

$$\boxed{k_x N_x + k_y N_y + p_z = 0}$$

che è simile alla terza equazione che avevamo ottenuto nel caso delle curvature principali k_1 e k_2. Ma qui manca ancora un pezzo!

Effetto del twist [torsione, attorcigliamento]

Il secondo passo consiste nel considerare il contributo di k_{xy}



12.12.23

Dalle figure si può scrivere subito l'equazione di equilibrio (manca p_z per semplicità)

$$p_z\,dx\,dy - (N_{xy}\,d\varphi_y)\,dx - (N_{yx}\,d\varphi_x)\,dy = 0$$

che facendo le debite sostituzioni di $d\varphi_x$ e $d\varphi_y$ si trasforma in

$$\boxed{2k_{xy}N_{xy} + p_z = 0}$$

Questa equazione va aggiunta alle precedenti per scrivere le terze equazioni d'equilibrio. In definitiva si ha che

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0\\
&k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy}N_{xy} + p_z = 0
\end{aligned}}$$