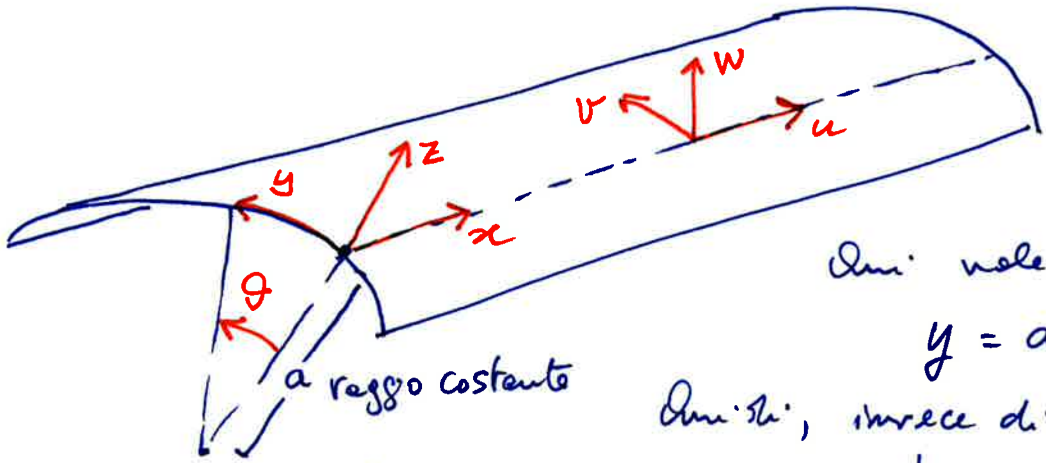
③ 13.12.23

APPLICAZIONE DELLA TEORIA MEMBRANALE A GUSCI CILINDRICI

Per un guscio cilindrico conviene usare un sistema di coordinate cilindriche:



Quindi vale che

$$y = a\vartheta$$

Quindi, invece di considerare k_y, p_y e v, useremo k_ϑ, p_ϑ e v_ϑ e rimpiazzeremo N_y e N_{xy} con N_ϑ e $N_{x\vartheta}$. Infine, un elemento infinitesimo di guscio ha dimensioni dx e $dy = a\,d\vartheta$.

Le rette generatrici in direzione x ha curvatura $k_x = 0$ e, di conseguenza, raggio di curvatura $r_x \to \infty$. La curvatura secondo ϑ invece è

$$k_\vartheta = -\frac{1}{a}$$

In questo caso gli assi coordinati sono proprio secondo le curvature principali e quindi il twist $k_{x\vartheta} = 0$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v_\vartheta \\ w \end{pmatrix} ; \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\vartheta \\ \gamma_{x\vartheta} \end{pmatrix} ; \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_\vartheta \\ p_z \end{pmatrix} ; \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_\vartheta \\ N_{x\vartheta} \end{pmatrix}$$

CINEMATICA

13.12.23

Per il sistema di riferimento polare abbiamo che

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

← note le curvature $k_x = 0$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{a}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{a} w$$

$$\gamma_{x\vartheta} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial x}$$

LEGAME COSTITUTIVO

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\vartheta)$$

$$N_\vartheta = \frac{Et}{1-\nu^2}(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_x)$$

$$N_{x\vartheta} = \frac{Et}{2(1+\nu)}\gamma_{x\vartheta}$$

EQUILIBRIO

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{x\vartheta}}{\partial \vartheta} + p_x = 0$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial N_{x\vartheta}}{\partial x} + p_\vartheta = 0$$

$$-\frac{1}{a}N_\vartheta + p_z = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\vartheta N_\vartheta + p_z = 0$$

SOLUZIONE GENERALE

Il sistema delle equazioni d'equilibrio è staticamente determinato e, inoltre, le N_ϑ si trovano subito e pertinenti del carico p_z:

$$N_\vartheta = a\, p_z$$

Per ottenere N_x e $N_{x\vartheta}$, bisogna integrare le equazioni d'equilibrio.

13.12.23

$$N_{x\theta} = -\int \left(p_\theta + \frac{1}{a}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \right) dx$$

$$N_x = -\int \left(p_x + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} \right) dx$$

funzioni

Integrando si ottengono due costanti di integrazione che devono essere calcolate attraverso le condizioni al contorno.

Una volta che le forze membranali N_x, N_θ e $N_{x\theta}$ sono state ottenute, si può usare il legame costitutivo mediante relazioni inverse per trovare le deformazioni

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et}(N_x - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Et}(N_\theta - \nu N_x)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{x\theta}$$

E integrando queste ultime si ottengono gli spostamenti:

$$u = \int \varepsilon_x \, dx$$

$$v_\theta = \int \left(\gamma_{x\theta} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) dx$$

$$w = a \left(\varepsilon_\theta - \frac{1}{a}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

Infatti:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u = \int \varepsilon_x \, dx$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{a}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a} w \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow w = a\left(\varepsilon_\theta - \frac{1}{a}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial x} = \gamma_{x\theta} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

APPLICAZIONE DI GUSCI CILINDRICI COME TRAVI

13.12.23

In alcuni casi è possibile introdurre le condizioni al contorno e determinare le costanti di integrazione pure di fare qualsiasi scelta riguardo al carico esterno. In tutti questi casi si ha che

(*) . $p_x = 0$ e p_θ e p_z indipendenti da x.

Per esempio se un certo carico evolve in maniera significativa il profilo del guscio, allora la teoria membranale non può essere più usata ed è necessario introdurre una teoria flessionale.

Per il carico di cui detto (*) la soluzione generale è scrivibile come

$$N_\theta = a p_z$$

$$N_{x\theta} = -\int \left(p_\theta + \frac{1}{a}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}\right) dx$$

$$= -\left(p_\theta + \frac{\partial p_z}{\partial \theta}\right) x + f_1(\theta)$$

$$N_x = -\int \left(p_x + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}\right) dx$$

$$= +\frac{1}{2a}\left(\frac{d p_\theta}{d\theta} + \frac{d^2 p_z}{d\theta^2}\right)x^2 - \frac{1}{a}\frac{d f_1(\theta)}{d\theta}x + f_2(\theta)$$

Esplicitando le componenti del carico,

$$p_x = 0$$

$$p_\theta = \hat{p}_\theta \sin\theta$$

$$p_z = \hat{p}_z \cos\theta$$

Allora si ottiene che anche le funzioni $f_1(\theta)$ e $f_2(\theta)$ devono essere scelte in maniera consistente.

13.12.23

$$N_\theta = a\hat{p}_z \cos\vartheta$$

$$N_{x\vartheta} = \left[(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)\, x + C_1\right] \sin\vartheta$$

$$N_x = -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)\, x^2 + C_1 x + C_2\right] \cos\vartheta$$

dove
$$\begin{cases} f_1(\vartheta) = C_1 \sin\vartheta \\ f_2(\vartheta) = C_2 \cos\vartheta \end{cases}$$

Sulla base di questi N_x, N_θ e $N_{x\theta}$, applicando il legame costitutivo all'inverso si ottengono le ε_x, ε_θ e $\gamma_{x\theta}$ e, mediante queste ultime, le componenti di spostamento u, v_θ, w.

Vedi Eq. (4.16), (4.17) e (4.18)

$$\begin{cases} Et\,u_x = \int n_{xx}dx - \nu \int n_{\theta\theta}dx \\ Et\,u_\theta = -\frac{1}{a}\int\int \frac{\partial n_{xx}}{\partial\theta}dxdx + \underline{\frac{\nu}{a}\int\int \frac{\partial n_{\theta\theta}}{\partial\theta}dxdx + 2(1+\nu)\int n_{x\theta}dx} \\ Et\,u_z = \frac{1}{a}\int\int \frac{\partial^2 n_{xx}}{\partial\theta^2}dxdx - \underline{\frac{\nu}{a}\int\int \frac{\partial^2 n_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}dxdx - 2(1+\nu)\int \frac{\partial n_{x\theta}}{\partial\theta}dx} - \nu a\,n_{xx} + a n_{\theta\theta} \end{cases} \tag{4.16}$$

On the basis of the general solution in Eq. (4.14) for the membrane forces it can be shown that the underlined terms are of the same order with respect to the axial co-ordinate x. Substitution of the general solution in these expressions for the displacements finally leads to

SE SOSTITUIAMO:

$$\begin{aligned} Et\,u_x &= -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{6}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\right]\cos\theta \\ &\quad - \nu a[\hat{p}_z x + C_1]\cos\theta \\ Et\,u_\theta &= -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{24}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4\right]\sin\theta \\ &\quad + (2+\nu)\left[\frac{1}{2}\left(\hat{p}_z - \frac{2(1+\nu)}{(2+\nu)}\hat{p}_\theta\right)x^2 + C_1x + C_2\right]\sin\theta \\ Et\,u_z &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{24}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4\right]\cos\theta \\ &\quad - 2\left[\frac{1}{2}\left(\hat{p}_z - \frac{(2+\nu)}{2}\hat{p}_\theta\right)x^2 + C_1x + C_2\right]\cos\theta + a^2\hat{p}_z\cos\theta \end{aligned} \tag{4.17}$$

These expressions appear to be rather obscure. If Poisson's ratio is chosen equal to zero ($\nu = 0$), these expressions allow more insight.

per $\nu = 0$

$$\begin{aligned} Et\,u_x &= -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{6}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\right]\cos\theta \\ Et\,u_\theta &= -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{24}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4\right]\sin\theta \\ &\quad + 2\left[\frac{1}{2}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^2 + C_1x + C_2\right]\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Et\,u_z &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{24}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4\right]\cos\theta \\ &\quad - 2\left[\frac{1}{2}(\hat{p}_z - \hat{p}_\theta)x^2 + C_1x + C_2\right]\cos\theta + a^2\hat{p}_z\cos\theta \end{aligned} \tag{4.18}$$

Hereafter we will discuss examples on the basis of these equations.