19/10/23

DEF $f: A \to \mathbb{R}$ $f(x,y)$ tende a l in un aperto A (x_0, y_0) punto di accumulazione

a) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$

Tale che $(x,y) \in A$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta$ $\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right)$

$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$

b) $f(x,y) \to \infty$ $\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty\right)$ se

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0$ Tale che $(x,y) \in A$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta$

$\Rightarrow |f(x,y)| > M$

DEF

$f: A \to \mathbb{R}$, A aperto, $(x_0, y_0) \notin A$ Punto di accumulazione.

$f(x,y)$ si dice continuabile in (x_0,y_0) se

$f(x_0,y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

nota: le funzioni elementari sono continue!

$\cos(x)$, $\sin(x)$, e^x, x, y, x^2, e^{xy}, ecc..

anche somma, differenza, prodotto, rapporto e composizione lo sono (dove definite).

una funzione definita per casi in generale non è continua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

dovrei verificare la continuità in $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \overset{?}{=} f(0,0) = 0$$

esercizi:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x}$$

in $x=0$ non è definita, quindi è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$

allora il limite è uguale ad $f(1,1)$.

$= f(1,1) = \frac{1^2+1^2}{1} = \frac{2}{1} = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} \ln(x+y) = \ln(2+3) = \ln 5 \qquad D = \{x+y > 0\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

provo ad "avvicinarmi" al punto interessato con una curva che sta nel dominio della funzione (escluso al più il punto in cui si vuole calcolare il limite) e che passa per il punto

scelgo $x=0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{0}{\sqrt{0+y^2}} = 0$

scelgo $y=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+0}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \text{ non esiste}$$

se utilizzando curve diverse ottengo valori diversi (o limiti inesistenti) vuol dire che il limite della funzione non esiste

se una funzione ha limite l in un punto, allora i limiti con qualsiasi curva sono sempre uguali ad l!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$x = 0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$

$\begin{cases} x = mt \\ y = nt \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$ $\quad m, n \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(mt)^2 nt}{(mt)^2+(nt)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{m^2 n t^3}{t^2(m^2+n^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{m^2 n t}{m^2+n^2} = 0$$

$y = x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

$0 \neq \frac{1}{2}$, quindi il limite non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y x^2}{x^2+y^2}$$

$\begin{cases} x = mt \\ y = nt \end{cases}$ $\quad \lim_{t\to 0} \frac{n m^2 t^3}{t^2(m^2+n^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{n m^2}{m^2+n^2} t = 0$

$n, m \neq 0$

$y = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$ $\qquad x = 0$ $\quad \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

$y = x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0$

se ottengo lo stesso valore con molte curve diverse, provo a restringere che quello sia effettivamente il limite

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = |y| \cdot \left| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

cvd $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Derivate

A aperto $\subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \to \mathbb{R}$

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO ALLA VARIABILE x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO ALLA VARIABILE y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$f(x,y) = e^x \cdot \cos y$ costante rispetto a x

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos y \cdot e^x$ $\qquad f_y(x,y) = e^x(-\sin y)$

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad f_y(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} 2y$

$f(x,y) = \cos(x-y) \cdot e^{x^2}$

$f_x = \left[-\sin(x-y)(1)\right] e^{x^2} + \cos(x-y)\left[e^{x^2} \cdot 2x\right]$

$f_y = e^{x^2}/-\sin(x-y)(-1)\big) = e^{x^2}\sin(x-y)$

$f = e^{x^3+y^2} - x^2 y$

$f_x = e^{x^3+y^2}(2x) - 2xy$ $\qquad f_y = e^{x^3+y^2}(2y) - x^2$