

Le soluzioni dell'esame di Matematica del 23 gennaio 2024

1. Occorre imporre che $4 - x^2 > 0$ e $\ln(4 - x^2) > 0$. Le due condizioni devono essere contemporaneamente soddisfatte.:

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ \ln(4 - x^2) > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per $x \in (-2, 2)$.

La seconda disequazione è equivalente a $4 - x^2 > e^0 = 1$, cioè $x^2 - 3 < 0$, che è soddisfatta per $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Il dominio D di f è dato dalle soluzioni che hanno in comune le due disequazioni:

$$D = (-2, 2) \cap (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

2. $f'(x) = \left(4(2 + \ln(2x))^3 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\right) \cdot \log_{10}(x^2 \cdot 10^x) + (2 + \ln(2x))^4 \cdot \frac{1}{x^2 10^x} \log_{10}(e) \cdot (2x \cdot 10^x + x^2 \cdot 10^x \cdot \ln(10))$

3. L'ordinata y_0 del punto del grafico di f di ascissa $x_0 = -1$ è data da $y_0 = f(x_0) = f(-1) = \ln(4 + 6) = \ln(10)$.

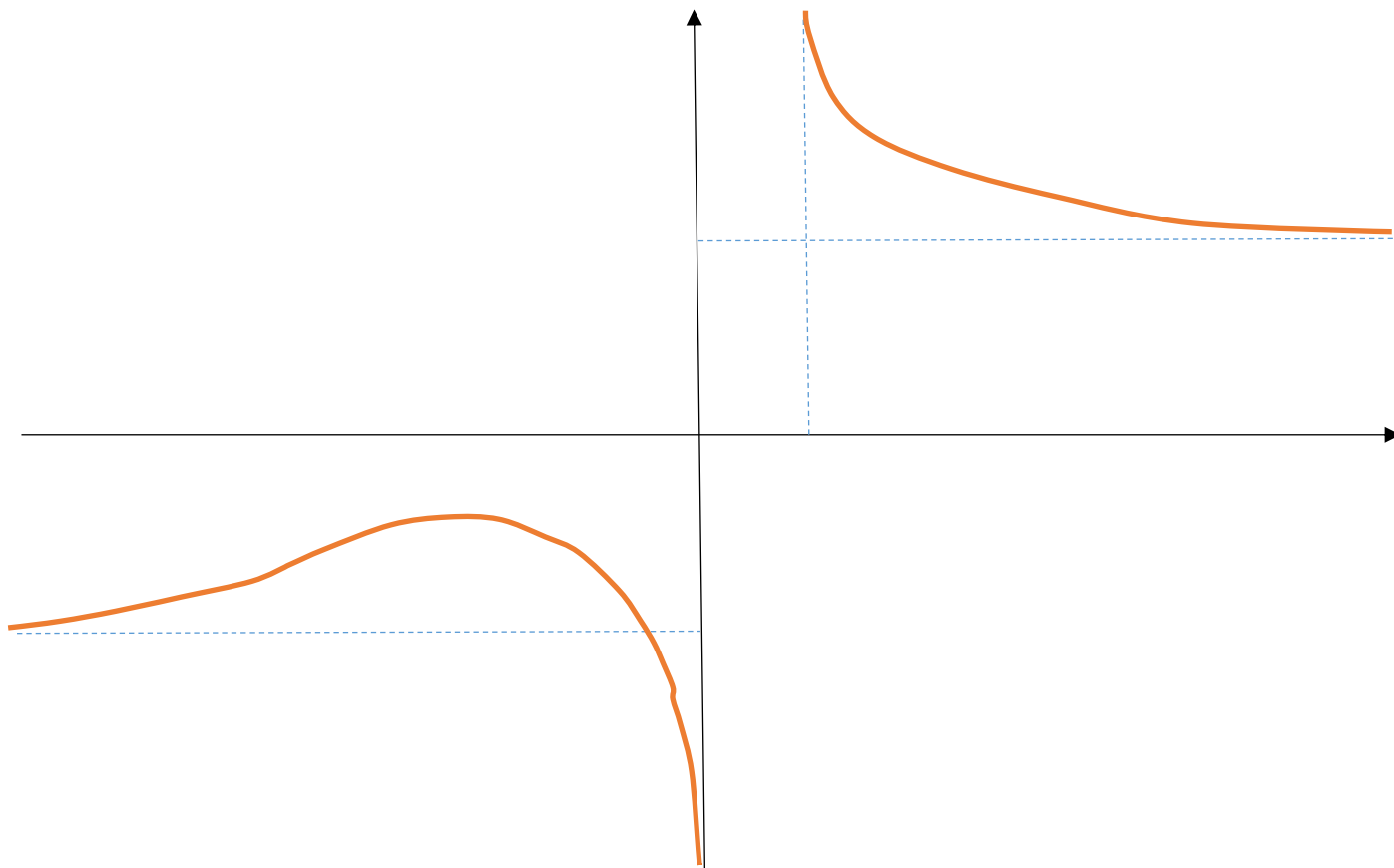
La derivata di f è data da $f'(x) = \frac{-6}{4-6x}$. Quindi, il coefficiente angolare della retta cercata è pari a

$$m = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{\frac{-6}{4+6}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

La retta ha dunque equazione

$$y - \ln(10) = \frac{5}{3}(x + 1)$$

4.



5. Innanzitutto osserviamo che $x^2 \cos \frac{1}{x}$ tende a 0 per x che tende a 0. Infatti, $\cos \frac{1}{x}$ è una funzione limitata (tra -1 e 1), mentre il fattore x^2 tende a 0. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2x^8 - 2x^5 - x^2}{x^9 - x^4 + 4x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^8 - 2x^5 - x^2}{x^9 - x^4 + 4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(-2x^6 - 2x^3 - 1)}{x^2(x^7 - x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^6 - 2x^3 - 1}{x^7 - x^2 + 4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

6. Un pediatra ha in cura 32 bambini. Il pediatra si è appuntato i dati delle altezze di tali pazienti bambini: vi sono 8 bambini alti 80 cm, 4 bambini alti 74 cm, 12 bambini alti 88 cm, e 8 bambini alti 76 cm. Calcola la media, la mediana e la deviazione standard delle altezze dei bambini che ha in cura il pediatra.

L'altezza media è data da

$$\mu = \frac{8 \cdot 80 + 4 \cdot 74 + 12 \cdot 88 + 8 \cdot 76}{32} = \frac{2600}{32} = 81,25 \text{ cm}$$

Per calcolare la mediana, mettiamo in ordine crescente i 32 dati:

74 - 74 - 74 - 74 - 76 - 76 - 76 - 76 - 76 - 76 - 76 - 76 - 80 - 80 - 80 - 80 - 80 - 80 - 80 - 80 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88 - 88

Poiché il numero di dati (32) è un numero pari, l'altezza mediana è data da

$$\tilde{\mu} = \frac{80 + 80}{2} = 80 \text{ cm}$$

La varianza è data da

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{32} (8 \cdot (80 - 81,25)^2 + 4 \cdot (74 - 81,25)^2 + 12 \cdot (88 - 81,25)^2 + 8 \cdot (76 - 81,25)^2) \\ &= \frac{1}{32} (12,5 + 210,25 + 546,75 + 220,5) = \frac{990}{32} \approx 30,94 \end{aligned}$$

e quindi la deviazione standard è $\sigma \approx 5,56$.

7. Denotiamo con X la variabile statistica "livelli di testosterone" e con Y il "tempo impiegato per percorrere 1500 metri piani".

Allora $\mu_X = 490$ e $\mu_Y = 260$. Il coefficiente di correlazione lineare tra le due variabili è dato da

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_Y)^2}}$$

Nella tabella sottostante calcoliamo tutti i dati necessari per il calcolo di ρ .

testosterone (x_i)	tempo (y_i)	$x_i - \mu_X$	$y_i - \mu_Y$	$(x_i - \mu_X)^2$	$(y_i - \mu_Y)^2$	$(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$
500	260	10	0	100	0	0
600	250	110	-10	12100	100	-1100
400	270	-90	10	8100	100	-900
750	240	260	-20	67600	400	-5200
200	280	-290	20	84100	400	-5800
			Σ	172000	1000	-13000

Quindi

$$\rho = \frac{-13000}{\sqrt{172000 \cdot 1000}} \approx -0,99$$

Vi è dunque un'ottima correlazione lineare (negativa) tra le due variabili.

Troviamo ora l'equazione della retta di regressione lineare. Il coefficiente angolare è dato da

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2} = \frac{-13000}{172000} \approx -0,08$$

e l'intercetta è data da

$$q = \mu_Y - m\mu_X \approx 260 - 0,08 \cdot 490 \approx 297,03.$$

La funzione lineare richiesta è dunque del tipo $f(x) = -0,08x + 297,03$.