Corso di Laurea Magistrale a Ciclo Unico in Chimica e Tecnologie Farmaceutiche

Esame di Matematica

23 gennaio 2024

1. Trova il dominio della funzione

$$f(x) = \log_{10}(\ln(4 - x^2))$$

2. Calcola la derivata della funzione

$$f(x) = (2 + \ln(2x))^4 \cdot \log_{10}(x^2 \cdot 10^x)$$

3. Trova la retta ortogonale al grafico di

$$f(x) = \ln(4 - 6x)$$

nel punto del grafico di ascissa $x_0 = -1$

4. Disegna il grafico della funzione *f*, sapendo che

- il suo dominio è l'insieme $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$
- non ci sono intersezioni con gli assi
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow\ x < -2$
- la derivata prima si annulla nel punto $(-2, -1)$

5. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-2x^8 - 2x^5 - x^2}{x^9 - x^4 + 4x^2} + x^2\cos\frac{1}{x}\right)$$

6. Un pediatra ha in cura 32 bambini. Il pediatra si è appuntato i dati delle altezze di tali pazienti bambini: vi sono 8 bambini alti 80 cm, 4 bambini alti 74 cm, 12 bambini alti 88 cm, e 8 bambini alti 76 cm. Calcola la media, la mediana e la deviazione standard delle altezze dei bambini che ha in cura il pediatra.

7. Un allenatore vuole stabilire se vi è una correlazione tra livelli di testosterone e prestazioni. A tal fine cronometra i tempi impiegati di un atleta della gara dei 1500 m. piani. Prima di ciascuna corsa vengono misurati i livelli di testosterone. I dati vengono riassunti nella seguente tabella:

testosterone (ng/dL)	*tempo (sec)*
500	260
600	250
400	270
750	240
200	280

a) Verificare che, in base a questi dati, vi è correlazione lineare tra livelli di testosterone e tempo di percorrenza dei 1500 metri piani.

b) Esprimere il tempo percorso in funzione dei livelli di testosterone per mezzo di una funzione lineare.

Alcune formule utili

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (con $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logaritmi

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \qquad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a(x^p) = p\log(x) \qquad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \qquad a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Statistica

Media aritmetica: $\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Media ponderata: $\mu = \frac{f_1x_1 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + \cdots + f_k} = \frac{1}{f_1 + \cdots + f_k}\sum_{i=1}^{N} f_ix_i$
dove f_i è la frequenza assoluta con cui compare il dato x_i

Media geometrica: $\mu_g = \sqrt[N]{x_1 \cdots x_N}$

Mediana: $\tilde{\mu} = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{se } N \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}\right) & \text{se } N \text{ è pari} \end{cases}$
($x_1, .., x_N$ in ordine crescente)

Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$

Varianza ponderata: $\sigma^2 = \frac{1}{f_1 + \cdots + f_k}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \mu)^2$

Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Equazione retta di regressione lineare:
$y = mx + q$, con

$$m = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)^2}, \quad q = \mu_Y - m\mu_X$$

dove $\sigma_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$ (covarianza)

Coefficiente di correlazione lineare:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_Y)^2}}$$

Derivate delle principali funzioni

f	f'
costante	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x}\log_a(e)$
$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{arcosen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Alcune proprietà delle derivate

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$
$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x) \qquad (c \in \mathbb{R})$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Geometria

Distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2)$:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Equazione di una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Condizione di parallelismo: $m = m'$

Condizione di perpendicolarità: $m \cdot m' = -1$

Distanza di un punto $P_0(x_0, y_0)$ *da una retta* $r: y = mx + q$:

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}}$$