

METODI MATEMATICI DELLA FISICA– AA 2023/24

Prova Scritta 13 Settembre 2024

Gli studenti che hanno frequentato le lezioni nell'AA 2023/24 e che hanno superato la prova scritta parziale sono tenuti a svolgere solo i punti 1, 2, 4,5.

1. (10 punti)

Si dimostrino usando sia la notazione notazione compatta che la notazione con gli indici per le matrici ed i vettori l'invarianza per trasformazioni tra basi ortonormali delle seguenti quantità:

$$\langle u|v\rangle, \quad \text{Tr}A, \quad \det A, \quad \text{Autoval}(A), \quad \langle u|A|v\rangle,$$

dove $|u\rangle, |v\rangle$ sono generici vettori ed A generica matrice di uno spazio vettoriale sul campo complesso di dimensione n .

2. (10 punti)

Si consideri l'equazione agli autovalori

$$P|u\rangle = \lambda|u\rangle$$

nello spazio delle funzioni $L^2(0, 2\pi)$ con condizioni al contorno periodiche $u(0) = u(2\pi)$ e dove P è l'operatore differenziale dato da

$$P = i \frac{d}{dx}$$

- (a) Si dimostri che P è hermitiano in $L^2(0, 2\pi)$ (può essere considerato autoaggiunto?)
- (b) Si trovino autovalori ed autovettori di P .
- (c) Si dimostri che gli autovettori costituiscono un set ortonormale completo su $L^2(0, 2\pi)$.
- (d) Il risultato ottenuto per gli autovettori ed autovalori di P è consistente con il suo carattere Hermitiano?

3. (10 punti)

- (a) Si definisca lo sviluppo in serie di Taylor-Laurent per una funzione analitica $f(z)$ in un generico punto z_0 (di analiticità o di singolarità).
- (b) Si derivi la formula per i coefficienti c_n dello sviluppo.
- (c) Si dia un esempio esplicito di un calcolo di tali coefficienti considerando una funzione ed un punto a piacere. Per questo esempio esplicito si trovi inoltre la regione di convergenza della serie.

4. (10 punti)

Determinare le due matrici A, B , 2×2 definite tramite la seguente azione su vettori di \mathbb{C}^2

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - iy \\ ax + y \end{pmatrix} \quad (0.1)$$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cy \\ 2ix + by \end{pmatrix} \quad (0.2)$$

- (a) determinare i coefficienti a, b, c in modo tale che A e B siano hermitiane ed ammettano un set di autovettori comuni
- (b) Si calcolino gli autovalori e gli autovettori u_1 e u_2 comuni delle due matrici, le si diagonalizzi e si scriva esplicitamente la trasformazione unitaria che effettua la diagonalizzazione simultanea delle due matrici.

5. **(10 punti)**

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = xe^{-ax}, \quad \text{per } x > 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{per } x < 0$$

con a reale positivo. Si verifichi il risultato ottenuto calcolando l'antitrasformata.

6. **(12 punti)**

Si considerino le due funzioni di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}, \quad g(z) = \frac{1}{(x^2 + 4)^2}$$

(a) Classificare i punti di singolarità delle funzioni (punto all'infinito incluso) e calcolarne i residui (punto all'infinito escluso).

(b) Trovare i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor-Laurent della funzione $f(z)$ intorno a $z = 0$. Trovare inoltre la regione di convergenza della serie.

(c) Calcolare l'integrale con il contorno C dato da un cerchio generico di raggio $R \neq n\pi$ (con n intero positivo) centrato nell'origine del piano complesso

$$I_1 = \int_C f(z) dz$$

(d) Calcolare usando il lemma di Jordan l'integrale sull'asse reale

$$I_2 = \int_0^\infty dx g(x)$$