

# Teoria Matematica dei Giochi

Antonio Iannizzotto

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Cagliari

Reading Course 2024/25



*Chi in cento battaglie riporta cento vittorie, non è il più abile in assoluto.  
Al contrario, chi non dà nemmeno battaglia, e sottomette le truppe dell'avversario,  
è il più abile in assoluto.*

**Sun Tzu**

- Introduzione: giochi, soluzioni ed equilibri
- Multifunzioni e Teorema di Nash
- Giochi a somma nulla e Teoria del minimax
- Bibliografia essenziale

Un po' di storia:

- Le origini [**Zermelo 1913**] [**Borel 1921**] [**von Neumann 1928**]
- Il boom: [**Nash 1951**] [**Morgenstern, von Neumann 1953**] [**Kuhn, Tucker 1953**] (Shapley)
- Analisi multivoca [**Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz 1926**] [**Kakutani 1941**] [**Michael 1956**] [**Browder 1967**] [**Cellina 1969**] [**Aubin, Frankowska 2008**]
- Teoria del minimax [**von Neumann 1928**] [**Fan 1966**] [**König 1992**] [**Ricceri 1993**]
- Teoria dei giochi e PDE [**Rossi 2011**] [**Caffarelli 2012**]

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione.

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione:  $P_1, \dots, P_n$  giocatori,  $X_1, \dots, X_n$  insiemi delle strategie,  $E$  insieme degli esiti,  $h : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow E$  funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_n, E, h)$$

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione.

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione:  $P_1, \dots, P_n$  giocatori,  $X_1, \dots, X_n$  insiemi delle strategie,  $E$  insieme degli esiti,  $h : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow E$  funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_n, E, h)$$

## Definizione

Un gioco è un'interazione tra due o più decisori razionali e intelligenti, detti giocatori. Un decisore è detto

- razionale se dispone di una preferenza sull'insieme degli esiti
- intelligente se persegue senza commettere errori la massima soddisfazione.

Classificazione dei giochi:

- statico/dinamico
- non cooperativo/cooperativo
- deterministico/stocastico

Rappresentazione:  $P_1, \dots, P_n$  giocatori,  $X_1, \dots, X_n$  insiemi delle strategie,  $E$  insieme degli esiti,  $h : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow E$  funzione del gioco

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_n, E, h)$$

## Definizione

Una preferenza  $\preceq$  è una relazione binaria su un insieme  $E$  con le seguenti proprietà:

- $e \preceq e$  per ogni  $e \in E$
- se  $e_1 \preceq e_2$  e  $e_2 \preceq e_3$  allora  $e_1 \preceq e_3$  per ogni  $e_1, e_2, e_3 \in E$
- $e_1 \preceq e_2$  o  $e_2 \preceq e_1$  per ogni  $e_1, e_2 \in E$
- se  $E$  è uno spazio topologico, allora l'insieme  $\{e \in E : e \preceq \bar{e}\}$  è chiuso per ogni  $\bar{e} \in E$ .

## Definizione

Un'utilità è una funzione  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- per ogni  $e_1, e_2 \in E$ , se  $e_1 \preceq e_2$ , allora  $u(e_1) \leq u(e_2)$
- per ogni  $e_1, e_2 \in E$ , se  $e_1 \prec e_2$ , allora  $u(e_1) < u(e_2)$ .

Se  $|E| \leq \aleph_0$  (o  $|E| \leq 2^{\aleph_0}$  spazio topologico) esiste un'utilità (continua). Allora si riformula

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n) \quad (f_i = u_i \circ h)$$

## Definizione

Una preferenza  $\preceq$  è una relazione binaria su un insieme  $E$  con le seguenti proprietà:

- $e \preceq e$  per ogni  $e \in E$
- se  $e_1 \preceq e_2$  e  $e_2 \preceq e_3$  allora  $e_1 \preceq e_3$  per ogni  $e_1, e_2, e_3 \in E$
- $e_1 \preceq e_2$  o  $e_2 \preceq e_1$  per ogni  $e_1, e_2 \in E$
- se  $E$  è uno spazio topologico, allora l'insieme  $\{e \in E : e \preceq \bar{e}\}$  è chiuso per ogni  $\bar{e} \in E$ .

## Definizione

Un'utilità è una funzione  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- per ogni  $e_1, e_2 \in E$ , se  $e_1 \preceq e_2$ , allora  $u(e_1) \leq u(e_2)$
- per ogni  $e_1, e_2 \in E$ , se  $e_1 \prec e_2$ , allora  $u(e_1) < u(e_2)$ .

Se  $|E| \leq \aleph_0$  (o  $|E| \leq 2^{\aleph_0}$  spazio topologico) esiste un'utilità (continua). Allora si riformula

$$\Gamma = (X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n) \quad (f_i = u_i \circ h)$$

Giochi in forma strategica  $\Gamma = (X, Y, f, g)$ :

## Pari o dispari

Si ha  $X = Y = \{p, d\}$  e due esiti (vince  $P$ , vince  $Q$ ):

$P \backslash Q$	$p$	$d$
$p$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$d$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

## Carta, pietra, forbice

Si ha  $X = Y = \{c, p, f\}$  e tre esiti (vince  $P$ , vince  $Q$ , pareggio):

$P \backslash Q$	$c$	$p$	$f$
$c$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$p$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
$f$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

Giochi in forma strategica  $\Gamma = (X, Y, f, g)$ :

## Pari o dispari

Si ha  $X = Y = \{p, d\}$  e due esiti (vince  $P$ , vince  $Q$ ):

$P \setminus Q$	$p$	$d$
$p$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$d$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

## Carta, pietra, forbice

Si ha  $X = Y = \{c, p, f\}$  e tre esiti (vince  $P$ , vince  $Q$ , pareggio):

$P \setminus Q$	$c$	$p$	$f$
$c$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
$p$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
$f$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

## Dominazioni e soluzione di un gioco per eliminazioni iterate:

### Definizione

Nel gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$  siano  $x_1, x_2 \in X$ :

- $x_1$  domina fortemente  $x_2$  se  $f(x_1, y) > f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$
- $x_1$  domina strettamente  $x_2$  se  $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$ , ed esiste  $\bar{y} \in Y$  t.c.  $f(x_1, \bar{y}) > f(x_2, \bar{y})$
- $x_1$  domina debolmente  $x_2$  se  $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$ .

### Esempio 1

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(1, 2)	(0, 1)
$x_2$	(0, 2)	(2, 1)

$y_1$  domina fortemente  $y_2$ , la soluzione del gioco è  $(x_1, y_1)$ .

Dominazioni e soluzione di un gioco per eliminazioni iterate:

## Definizione

Nel gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$  siano  $x_1, x_2 \in X$ :

- $x_1$  domina fortemente  $x_2$  se  $f(x_1, y) > f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$
- $x_1$  domina strettamente  $x_2$  se  $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$ , ed esiste  $\bar{y} \in Y$  t.c.  $f(x_1, \bar{y}) > f(x_2, \bar{y})$
- $x_1$  domina debolmente  $x_2$  se  $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$  per ogni  $y \in Y$ .

## Esempio 1

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(1, 2)	(0, 1)
$x_2$	(0, 2)	(2, 1)

$x_1$  domina fortemente  $x_2$ , la soluzione del gioco è  $(x_1, y_1)$ .

## Esempio 2

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(3, 3)	(2, 2)
$x_2$	(0, 2)	(1, 1)
$x_3$	(1, 2)	(0, 1)

$y_1$  domina fortemente  $y_2$ , la soluzione del gioco è  $(x_1, y_1)$ .

## Esempio 3

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(3, 5)	(2, 5)
$x_2$	(3, 0)	(0, 2)
$x_3$	(0, 2)	(2, 0)

$x_1$  domina strettamente  $x_2$  e  $x_3$ , le possibili soluzioni del gioco sono  $(x_1, y_1)$  e  $(x_1, y_2)$ .

## Esempio 2

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(3, 3)	(2, 2)
$x_2$	(0, 2)	(1, 1)
$x_3$	(1, 2)	(0, 1)

$y_1$  domina fortemente  $y_2$ , la soluzione del gioco è  $(x_1, y_1)$ .

## Esempio 3

Consideriamo il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	(3, 5)	(2, 5)
$x_2$	(3, 0)	(0, 2)
$x_3$	(0, 2)	(2, 0)

$x_1$  domina strettamente  $x_2$  e  $x_3$ , le possibili soluzioni del gioco sono  $(x_1, y_1)$  e  $(x_1, y_2)$ .

Quando le dominazioni non bastano...

## Definizione

La coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un equilibrio di Nash di  $\Gamma$  se

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$  per ogni  $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$  per ogni  $y \in Y$ .

L'insieme degli equilibri di  $\Gamma$  è  $Ne(\Gamma)$ .

Nei casi precedenti

- Pari o dispari,  $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Carta, pietra, forbice,  $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Esempio 1,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 2,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 3,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2)\}$

Quando le dominazioni non bastano...

## Definizione

La coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un equilibrio di Nash di  $\Gamma$  se

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$  per ogni  $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$  per ogni  $y \in Y$ .

L'insieme degli equilibri di  $\Gamma$  è  $Ne(\Gamma)$ .

Nei casi precedenti

- Pari o dispari,  $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Carta, pietra, forbice,  $Ne(\Gamma) = \emptyset$
- Esempio 1,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 2,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1)\}$
- Esempio 3,  $Ne(\Gamma) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2)\}$

## Guerra dei sessi

Una coppia decide se andare allo stadio ( $s$ ) o a teatro ( $t$ )...

$P \backslash Q$	$s$	$t$
$s$	(10, 5)	(0, 0)
$t$	(0, 0)	(5, 10)

Non vi sono strategie dominanti, ma  $Ne(\Gamma) = \{(s, s), (t, t)\}$ .

## Dilemma del prigioniero

Due uomini vengono arrestati e devono scegliere se confessare ( $c$ ) o tacere ( $t$ )...

$P \backslash Q$	$c$	$t$
$c$	(-5, -5)	(0, -10)
$t$	(-10, 0)	(-1, -1)

Si ha  $Ne(\Gamma) = \{(c, c)\}$  (ma sarebbe meglio  $(t, t)$ !).

## Guerra dei sessi

Una coppia decide se andare allo stadio ( $s$ ) o a teatro ( $t$ )...

$P \backslash Q$	$s$	$t$
$s$	(10, 5)	(0, 0)
$t$	(0, 0)	(5, 10)

Non vi sono strategie dominanti, ma  $Ne(\Gamma) = \{(s, s), (t, t)\}$ .

## Dilemma del prigioniero

Due uomini vengono arrestati e devono scegliere se confessare ( $c$ ) o tacere ( $t$ )...

$P \backslash Q$	$c$	$t$
$c$	(-5, -5)	(0, -10)
$t$	(-10, 0)	(-1, -1)

Si ha  $Ne(\Gamma) = \{(c, c)\}$  (ma sarebbe meglio  $(t, t)$ !).

## Definizione

Nel gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$ , la coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia  $(x, y) \in X \times Y$  verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\bar{x}, \bar{y}), g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ ;
- $f(x, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y}), g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$ .

L'insieme degli ottimi per  $\Gamma$  si denota  $Po(\Gamma)$ .

Nel Dilemma del prigioniero  $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$ , ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia.

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ ?

## Definizione

Nel gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$ , la coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia  $(x, y) \in X \times Y$  verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ ;
- $f(x, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$ .

L'insieme degli ottimi per  $\Gamma$  si denota  $Po(\Gamma)$ .

Nel Dilemma del prigioniero  $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$ , ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia.

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ ?

## Definizione

Nel gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$ , la coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un ottimo (di Pareto) se non esiste un'altra coppia  $(x, y) \in X \times Y$  verificante una delle seguenti condizioni:

- $f(x, y) > f(\bar{x}, \bar{y}), g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ ;
- $f(x, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y}), g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$ .

L'insieme degli ottimi per  $\Gamma$  si denota  $Po(\Gamma)$ .

Nel Dilemma del prigioniero  $Po(\Gamma) = \{(t, t)\}$ , ma questa soluzione *non viene raggiunta* per

- mancanza di informazione
- mancanza di fiducia.

Per questo, nello studio dei giochi non cooperativi ci concentriamo sugli equilibri di Nash...

**Problema:** Sotto quali ipotesi  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ ?

## Teorema di Nash

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  sono convessi e compatti,  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue e

- $f(\cdot, y)$  è quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$  è quasi-concava per ogni  $x \in X$ ,

allora  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ .

Le ipotesi su  $X, Y$  sono naturali nel contesto delle *strategie miste*: sia  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e sia  $\Pi(X)$  l'insieme delle distribuzioni di probabilità  $p : X \rightarrow [0, 1]$  ( $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ ). Definiamo  $\varphi : \Pi(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ponendo

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^n p(x_i) e_i,$$

allora  $\varphi(\Pi(X)) \subset \mathbb{R}^n$  è il semplice  $(n-1)$ -dimensionale di vertici  $e_1, \dots, e_n$  (compatto e convesso). Poniamo per ogni  $(p, q) \in \Pi(X) \times \Pi(Y)$

$$\tilde{f}(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) q(y_j) f(x_i, y_j)$$

e definiamo analogamente  $\tilde{g}$ . Nel gioco esteso  $\tilde{\Gamma} = (\Pi(X), \Pi(Y), \tilde{f}, \tilde{g})$  la distribuzione  $p \sim \varphi(p)$  rappresenta la strategia

' $P$  dispone del capitale 1 e scommette  $p(x_i)$  su  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )'

## Teorema di Nash

Se  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  sono convessi e compatti,  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue e

- $f(\cdot, y)$  è quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$  è quasi-concava per ogni  $x \in X$ ,

allora  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ .

Le ipotesi su  $X, Y$  sono naturali nel contesto delle *strategie miste*: sia  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e sia  $\Pi(X)$  l'insieme delle distribuzioni di probabilità  $p : X \rightarrow [0, 1]$  ( $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$ ). Definiamo  $\varphi : \Pi(X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ponendo

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^n p(x_i) e_i,$$

allora  $\varphi(\Pi(X)) \subset \mathbb{R}^n$  è il semplice  $(n-1)$ -dimensionale di vertici  $e_1, \dots, e_n$  (compatto e convesso). Poniamo per ogni  $(p, q) \in \Pi(X) \times \Pi(Y)$

$$\tilde{f}(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) q(y_j) f(x_i, y_j)$$

e definiamo analogamente  $\tilde{g}$ . Nel gioco esteso  $\tilde{\Gamma} = (\Pi(X), \Pi(Y), \tilde{f}, \tilde{g})$  la distribuzione  $p \sim \varphi(p)$  rappresenta la strategia

' $P$  dispone del capitale 1 e scommette  $p(x_i)$  su  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )'

## Pari e dispari in strategie miste

Si pone  $X = Y = [0, 1]$  e i payoff sono

$$\tilde{f}(x, y) = xy - x(1 - y) - (1 - x)y + (1 - x)(1 - y) = 4xy - 2x - 2y + 1$$

$$\tilde{g}(x, y) = -xy + x(1 - y) + (1 - x)y - (1 - x)(1 - y) = -4xy + 2x + 2y - 1$$

( $\tilde{f} + \tilde{g} = 0$ ), dunque  $Ne(\tilde{\Gamma}) \neq \emptyset$ .

## Carta, pietra, forbice in strategie miste

Si pone

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_i \geq 0, y_1 + y_2 \leq 1\}$$

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - x_1 + x_2 + y_1 - y_2$$

$$\tilde{g}(x_1, x_2, y_1, y_2) = -3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1 - x_2 - y_1 + y_2$$

( $\tilde{f} + \tilde{g} = 0$ ), dunque  $Ne(\tilde{\Gamma}) \neq \emptyset$ .

## Pari e dispari in strategie miste

Si pone  $X = Y = [0, 1]$  e i payoff sono

$$\tilde{f}(x, y) = xy - x(1 - y) - (1 - x)y + (1 - x)(1 - y) = 4xy - 2x - 2y + 1$$

$$\tilde{g}(x, y) = -xy + x(1 - y) + (1 - x)y - (1 - x)(1 - y) = -4xy + 2x + 2y - 1$$

( $\tilde{f} + \tilde{g} = 0$ ), dunque  $Ne(\tilde{\Gamma}) \neq \emptyset$ .

## Carta, pietra, forbice in strategie miste

Si pone

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_i \geq 0, y_1 + y_2 \leq 1\}$$

$$\tilde{f}(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - x_1 + x_2 + y_1 - y_2$$

$$\tilde{g}(x_1, x_2, y_1, y_2) = -3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1 - x_2 - y_1 + y_2$$

( $\tilde{f} + \tilde{g} = 0$ ), dunque  $Ne(\tilde{\Gamma}) \neq \emptyset$ .

## Definizione

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . Una multifunzione  $F : X \rightarrow 2^Y$  è una funzione da  $X$  nell'insieme delle parti  $2^Y$ .

Formule insiemistiche:

$$\text{dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) \text{ per ogni } A \subseteq X$$

$$F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\},$$

$$F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\} \text{ per ogni } B \subseteq Y$$

$$\text{gr}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

**Nota:**  $X \setminus F^\pm(B) = F^\mp(Y \setminus B)$ . Da ora assumeremo  $\text{dom}(F) = X$ .

## Definizione

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . Una multifunzione  $F : X \rightarrow 2^Y$  è una funzione da  $X$  nell'insieme delle parti  $2^Y$ .

Formule insiemistiche:

$$\text{dom}(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) \text{ per ogni } A \subseteq X$$

$$F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\},$$

$$F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\} \text{ per ogni } B \subseteq Y$$

$$\text{gr}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

**Nota:**  $X \setminus F^\pm(B) = F^\mp(Y \setminus B)$ . Da ora assumeremo  $\text{dom}(F) = X$ .

Definizioni topologiche:

## Definizione

La multifunzione  $F : X \rightarrow 2^Y$  è

- semicontinua inferiormente (s.c.i.) in  $x$  se per ogni  $B \subset Y$  aperto t.c.  $F(x) \cap B \neq \emptyset$  esiste  $U \subset X$  intorno di  $x$  t.c.  $F(x') \cap B \neq \emptyset$  per ogni  $x' \in U$
- semicontinua superiormente (s.c.s.) in  $x$  se per ogni  $B \subset Y$  aperto t.c.  $F(x) \subseteq B$  esiste  $U \subset X$  intorno di  $x$  t.c.  $F(x') \subseteq B$  per ogni  $x' \in U$
- continua in  $x$  se è s.c.i. e s.c.s.
- aperta se  $F(A)$  è aperto per ogni  $A \subset X$  aperto
- chiusa se  $F(A)$  è chiuso per ogni  $A \subset X$  chiuso.

## Caratterizzazione:

- $F$  s.c.i.  $\Leftrightarrow F^-(B)$  aperto per ogni  $B \subset Y$  aperto
- $F$  s.c.s.  $\Leftrightarrow F^+(B)$  aperto per ogni  $B \subset Y$  aperto

Sia  $F(x) = [a(x), b(x)]$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ( $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ ), allora

- $F$  è s.c.i.  $\Leftrightarrow a$  è s.c.s. e  $b$  è s.c.i.
- $F$  è s.c.s.  $\Leftrightarrow a$  è s.c.i. e  $b$  è s.c.s.

### Esempio 1

Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0 \\ [0, 1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{se } x < 0 \\ \{1/2\} & \text{se } x = 0 \\ [0, 1] & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora  $F$  è s.c.s. ma non s.c.i. mentre  $G$  è s.c.i. ma non s.c.s. Inoltre,  $gr(F)$  è chiuso,  $gr(G)$  no

**Nota:** Multifunzioni come  $F$  si usano per 'riempire' i salti delle funzioni univoche discontinue (gradino di Heaviside)

Sia  $F(x) = [a(x), b(x)]$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ( $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ ), allora

- $F$  è s.c.i.  $\Leftrightarrow a$  è s.c.s. e  $b$  è s.c.i.
- $F$  è s.c.s.  $\Leftrightarrow a$  è s.c.i. e  $b$  è s.c.s.

## Esempio 1

Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  poniamo

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 0 \\ [0, 1] & \text{se } x = 0 \\ \{1\} & \text{se } x > 0. \end{cases}, \quad G(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{se } x < 0 \\ \{1/2\} & \text{se } x = 0 \\ [0, 1] & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora  $F$  è s.c.s. ma non s.c.i. mentre  $G$  è s.c.i. ma non s.c.s. Inoltre,  $gr(F)$  è chiuso,  $gr(G)$  no

**Nota:** Multifunzioni come  $F$  si usano per 'riempire' i salti delle funzioni univoche discontinue (gradino di Heaviside)

Alcune proprietà topologiche:

## Lemma

Sia  $F : X \rightarrow 2^Y$ :

- $F$  s.c.s. a valori chiusi  $\Rightarrow gr(F) \subset X \times Y$  chiuso
- $Y$  compatto,  $gr(F)$  chiuso  $\Rightarrow F$  s.c.s.
- $X$  compatto,  $F$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F(X)$  compatto

## Lemma

Siano  $F : X \rightarrow 2^Y$ ,  $G : X \rightarrow 2^Z$ :

- $F, G$  s.c.i.  $\Rightarrow F \times G$  s.c.i.
- $F, G$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F \times G$  s.c.s.

## Lemma

Siano  $F, G : X \rightarrow 2^Y$  s.c.i.,  $r > 0$  e  $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$ . Allora  $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$  è s.c.i.

Alcune proprietà topologiche:

### Lemma

Sia  $F : X \rightarrow 2^Y$ :

- $F$  s.c.s. a valori chiusi  $\Rightarrow gr(F) \subset X \times Y$  chiuso
- $Y$  compatto,  $gr(F)$  chiuso  $\Rightarrow F$  s.c.s.
- $X$  compatto,  $F$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F(X)$  compatto

### Lemma

Siano  $F : X \rightarrow 2^Y$ ,  $G : X \rightarrow 2^Z$ :

- $F, G$  s.c.i.  $\Rightarrow F \times G$  s.c.i.
- $F, G$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F \times G$  s.c.s.

### Lemma

Siano  $F, G : X \rightarrow 2^Y$  s.c.i.,  $r > 0$  e  $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$ . Allora  $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$  è s.c.i.

Alcune proprietà topologiche:

### Lemma

Sia  $F : X \rightarrow 2^Y$ :

- $F$  s.c.s. a valori chiusi  $\Rightarrow gr(F) \subset X \times Y$  chiuso
- $Y$  compatto,  $gr(F)$  chiuso  $\Rightarrow F$  s.c.s.
- $X$  compatto,  $F$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F(X)$  compatto

### Lemma

Siano  $F : X \rightarrow 2^Y$ ,  $G : X \rightarrow 2^Z$ :

- $F, G$  s.c.i.  $\Rightarrow F \times G$  s.c.i.
- $F, G$  s.c.s. a valori compatti  $\Rightarrow F \times G$  s.c.s.

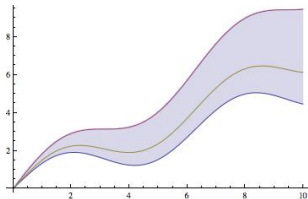
### Lemma

Siano  $F, G : X \rightarrow 2^Y$  s.c.i.,  $r > 0$  e  $B_r(G(x)) = \{y \in Y : d(y, G(x)) < r\}$ . Allora  $x \mapsto F(x) \cap B_r(G(x))$  è s.c.i.

Il problema delle selezioni continue:

## Definizione

Si  $F : X \rightarrow 2^Y$ . Allora  $f : X \rightarrow Y$  è una selezione di  $F$  se per ogni  $x \in X$  si ha  $f(x) \in F(x)$ .



Multifunzioni s.c.s. in genere non hanno selezioni **continue**, mentre quelle s.c.i. sì (ved.  $F(x) = [a(x), b(x)]$ )

## Teorema di Michael

Sia  $F : X \rightarrow 2^Y$  s.c.i. a valori chiusi e convessi. Allora  $F$  ha una selezione continua.

**Dimostrazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  continua t.c.

$$d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon.$$

Infatti, per ogni  $y \in Y$  sia  $A_y = F^{-}(B_\varepsilon(y))$ , allora  $(A_y)$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , che ammette un raffinamento localmente finito  $(E_y)$ . A questo è subordinata una partizione continua dell'unità: per ogni  $y \in Y$  esistono  $C_y \subset E_y$  chiuso,  $\varphi_y : X \rightarrow [0, 1]$  continua t.c.  $\varphi_y = 0$  in  $X \setminus C_y$  e  $\sum_{y \in Y} \varphi_y = 1$ . Poniamo

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{y \in Y} \varphi_y(x)y,$$

allora  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  è continua e approssima  $F$ .

Per induzione esiste una successione  $(f_k)$  di funzioni continue t.c.

$$d(f_k(x), F(x)) < \frac{1}{2^k}, \quad |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Dunque  $(f_k)$  converge uniformemente a  $f$  continua e

$$d(f(x), F(x)) = 0. \quad \square$$

## Teorema di Michael

Sia  $F : X \rightarrow 2^Y$  s.c.i. a valori chiusi e convessi. Allora  $F$  ha una selezione continua.

**Dimostrazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  continua t.c.

$$d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon.$$

Infatti, per ogni  $y \in Y$  sia  $A_y = F^{-}(B_\varepsilon(y))$ , allora  $(A_y)$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , che ammette un raffinamento localmente finito  $(E_y)$ . A questo è subordinata una partizione continua dell'unità: per ogni  $y \in Y$  esistono  $C_y \subset E_y$  chiuso,  $\varphi_y : X \rightarrow [0, 1]$  continua t.c.  $\varphi_y = 0$  in  $X \setminus C_y$  e  $\sum_{y \in Y} \varphi_y = 1$ . Poniamo

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{y \in Y} \varphi_y(x)y,$$

allora  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  è continua e approssima  $F$ .

Per induzione esiste una successione  $(f_k)$  di funzioni continue t.c.

$$d(f_k(x), F(x)) < \frac{1}{2^k}, \quad |f_k(x) - f_{k+1}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Dunque  $(f_k)$  converge uniformemente a  $f$  continua e

$$d(f(x), F(x)) = 0. \quad \square$$

Punti fissi di multifunzioni:

## Definizione

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$ . L'insieme dei suoi punti fissi è

$$\text{fix}(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}.$$

## Teorema di Schauder (multivoco)

Siano  $X$  compatto, convesso,  $F : X \rightarrow 2^X$  s.c.i. a valori chiusi, convessi. Allora  $\text{fix}(F) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Per il Teorema di Michael esiste una selezione continua  $f : X \rightarrow X$  di  $F$ , da cui per il Teorema di Schauder (univoco) esiste  $\bar{x} \in X$  t.c.  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Dunque  $\bar{x} \in \text{fix}(F)$ . □

**Problema:** E se  $F$  è s.c.s.?

Punti fissi di multifunzioni:

## Definizione

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$ . L'insieme dei suoi punti fissi è

$$\text{fix}(F) = \{x \in X : x \in F(x)\}.$$

## Teorema di Schauder (multivoco)

Siano  $X$  compatto, convesso,  $F : X \rightarrow 2^X$  s.c.i. a valori chiusi, convessi. Allora  $\text{fix}(F) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Per il Teorema di Michael esiste una selezione continua  $f : X \rightarrow X$  di  $F$ , da cui per il Teorema di Schauder (univoco) esiste  $\bar{x} \in X$  t.c.  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Dunque  $\bar{x} \in \text{fix}(F)$ . □

**Problema:** E se  $F$  è s.c.s.?

## Lemma (Cellina)

Siano  $X$  compatto,  $F : X \rightarrow 2^Y$  s.c.s. a valori convessi,  $r > 0$ . Allora esiste  $g_r : X \rightarrow Y$  continua t.c. per ogni  $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r.$$

## Teorema di Kakutani

Siano  $X$  compatto, convesso,  $F : X \rightarrow 2^X$  s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora  $fix(F) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $g_k : X \rightarrow X$  continua t.c.

$$d((x, g_k(x)), gr(F)) < \frac{1}{k}.$$

Per il Teorema di Schauder esiste  $x_k \in X$  t.c.  $g_k(x_k) = x_k$ . Abbiamo  $x_k \rightarrow \bar{x}$  da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}), gr(F)) = 0.$$

Poiché  $gr(F)$  è chiuso,  $(\bar{x}, \bar{x}) \in gr(F)$ , ovvero  $\bar{x} \in fix(F)$ . □

**Nota:** Questo è vero solo in dimensione **finita**!

## Lemma (Cellina)

Siano  $X$  compatto,  $F : X \rightarrow 2^Y$  s.c.s. a valori convessi,  $r > 0$ . Allora esiste  $g_r : X \rightarrow Y$  continua t.c. per ogni  $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r.$$

## Teorema di Kakutani

Siano  $X$  compatto, convesso,  $F : X \rightarrow 2^X$  s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora  $fix(F) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $g_k : X \rightarrow X$  continua t.c.

$$d((x, g_k(x)), gr(F)) < \frac{1}{k}.$$

Per il Teorema di Schauder esiste  $x_k \in X$  t.c.  $g_k(x_k) = x_k$ . Abbiamo  $x_k \rightarrow \bar{x}$  da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}), gr(F)) = 0.$$

Poiché  $gr(F)$  è chiuso,  $(\bar{x}, \bar{x}) \in gr(F)$ , ovvero  $\bar{x} \in fix(F)$ . □

**Nota:** Questo è vero solo in dimensione **finita**!

## Lemma (Cellina)

Siano  $X$  compatto,  $F : X \rightarrow 2^Y$  s.c.s. a valori convessi,  $r > 0$ . Allora esiste  $g_r : X \rightarrow Y$  continua t.c. per ogni  $x \in X$

$$d((x, g_r(x)), gr(F)) \leq r.$$

## Teorema di Kakutani

Siano  $X$  compatto, convesso,  $F : X \rightarrow 2^X$  s.c.s. a valori chiusi, convessi. Allora  $fix(F) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $g_k : X \rightarrow X$  continua t.c.

$$d((x, g_k(x)), gr(F)) < \frac{1}{k}.$$

Per il Teorema di Schauder esiste  $x_k \in X$  t.c.  $g_k(x_k) = x_k$ . Abbiamo  $x_k \rightarrow \bar{x}$  da cui

$$d((\bar{x}, \bar{x}), gr(F)) = 0.$$

Poiché  $gr(F)$  è chiuso,  $(\bar{x}, \bar{x}) \in gr(F)$ , ovvero  $\bar{x} \in fix(F)$ . □

**Nota:** Questo è vero solo in dimensione **finita**!

Torniamo ora al Teorema di Nash:

## Teorema di Nash

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  convessi e compatti,  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  continue t.c.

- $f(\cdot, y)$  è quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$  è quasi-concava per ogni  $x \in X$

Allora  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Definiamo le multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \{x \in X : f(x, y) = \max_X f(\cdot, y)\}$$

$$R_Q(x) = \{y \in Y : g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot)\}$$

quindi poniamo per ogni  $(x, y) \in X \times Y$

$$R(x, y) = R_P(y) \times R_Q(x)$$

Dalla definizione di equilibrio

$$Ne(\Gamma) = \text{fix}(R)$$

Dobbiamo provare che  $\text{fix}(R) \neq \emptyset$ ...

Torniamo ora al Teorema di Nash:

## Teorema di Nash

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  convessi e compatti,  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  continue t.c.

- $f(\cdot, y)$  è quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $g(x, \cdot)$  è quasi-concava per ogni  $x \in X$

Allora  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Definiamo le multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \{x \in X : f(x, y) = \max_X f(\cdot, y)\}$$

$$R_Q(x) = \{y \in Y : g(x, y) = \max_Y g(x, \cdot)\}$$

quindi poniamo per ogni  $(x, y) \in X \times Y$

$$R(x, y) = R_P(y) \times R_Q(x)$$

Dalla definizione di equilibrio

$$Ne(\Gamma) = \text{fix}(R)$$

Dobbiamo provare che  $\text{fix}(R) \neq \emptyset$ ...

Consideriamo la multifunzione  $R_P : Y \rightarrow 2^X$ . Per le ipotesi su  $f$ ,  $R_P$  ha valori compatti convessi. Proviamo che  $gr(R_P)$  è chiuso, per assurdo: sia  $(y_k, x_k) \in gr(R_P)$  convergente a  $(\bar{y}, \bar{x}) \notin gr(R_P)$ , allora

$$f(\bar{x}, \bar{y}) < \max_X f(\cdot, \bar{y})$$

ovvero esistono  $\varepsilon > 0$ ,  $x \neq \bar{x}$  t.c.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon < f(x, \bar{y}) < \max_X f(\cdot, \bar{y})$$

Per  $k$  abbastanza grande abbiamo

$$f(x_k, y_k) < f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x, y_k) > f(x, \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui  $f(x_k, y_k) < f(x, y_k)$ , assurdo. Dunque  $R_P : Y \rightarrow 2^X$  è s.c.s.

Similmente  $R_Q : X \rightarrow 2^Y$  è s.c.s. a valori compatti convessi. Dunque anche  $R$  lo è. Per il Teorema di Kakutani esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in fix(R)$ , da cui  $(\bar{x}, \bar{y}) \in Ne(\Gamma)$  □

Vale in particolare la formula operativa

$$Ne(\Gamma) = gr(R_P)^T \cap gr(R_Q)$$

Consideriamo la multifunzione  $R_P : Y \rightarrow 2^X$ . Per le ipotesi su  $f$ ,  $R_P$  ha valori compatti convessi. Proviamo che  $gr(R_P)$  è chiuso, per assurdo: sia  $(y_k, x_k) \in gr(R_P)$  convergente a  $(\bar{y}, \bar{x}) \notin gr(R_P)$ , allora

$$f(\bar{x}, \bar{y}) < \max_X f(\cdot, \bar{y})$$

ovvero esistono  $\varepsilon > 0$ ,  $x \neq \bar{x}$  t.c.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon < f(x, \bar{y}) < \max_X f(\cdot, \bar{y})$$

Per  $k$  abbastanza grande abbiamo

$$f(x_k, y_k) < f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x, y_k) > f(x, \bar{y}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui  $f(x_k, y_k) < f(x, y_k)$ , assurdo. Dunque  $R_P : Y \rightarrow 2^X$  è s.c.s.

Similmente  $R_Q : X \rightarrow 2^Y$  è s.c.s. a valori compatti convessi. Dunque anche  $R$  lo è. Per il Teorema di Kakutani esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in fix(R)$ , da cui  $(\bar{x}, \bar{y}) \in Ne(\Gamma)$  □

Vale in particolare la formula operativa

$$Ne(\Gamma) = gr(R_P)^T \cap gr(R_Q)$$

## Dilemma del prigioniero (in strategie miste)

Si ha  $X = Y = [0, 1]$  e

$$f(x, y) = 4xy + x - 9y - 1, \quad g(x, y) = 4xy - 9x + y - 1.$$

Le (multi) funzioni di risposta ottima sono  $[R_P(y) = \{1\}, R_Q(x) = \{1\}]$ . Dunque  $Ne(\Gamma) = \{(1, 1)\}$  (già determinato).

## Guerra dei sessi (in strategie miste)

Si ha  $X = Y = [0, 1]$  e

$$f(x, y) = 15xy - 5x - 5y + 5, \quad g(x, y) = 15xy - 10x - 10y + 10.$$

Multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y < 1/3 \\ [0, 1] & \text{se } y = 1/3 \\ \{1\} & \text{se } y > 1/3 \end{cases}, \quad R_Q(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 2/3 \\ [0, 1] & \text{se } x = 2/3 \\ \{1\} & \text{se } x > 2/3 \end{cases}.$$

Dunque  $Ne(\Gamma) = \{(0, 0), (2/3, 1/3), (1, 1)\}$ .

## Dilemma del prigioniero (in strategie miste)

Si ha  $X = Y = [0, 1]$  e

$$f(x, y) = 4xy + x - 9y - 1, \quad g(x, y) = 4xy - 9x + y - 1.$$

Le (multi) funzioni di risposta ottima sono  $[R_P(y) = \{1\}, R_Q(x) = \{1\}]$ . Dunque  $Ne(\Gamma) = \{(1, 1)\}$  (già determinato).

## Guerra dei sessi (in strategie miste)

Si ha  $X = Y = [0, 1]$  e

$$f(x, y) = 15xy - 5x - 5y + 5, \quad g(x, y) = 15xy - 10x - 10y + 10.$$

Multifunzioni di risposta ottima:

$$R_P(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y < 1/3 \\ [0, 1] & \text{se } y = 1/3 \\ \{1\} & \text{se } y > 1/3 \end{cases}, \quad R_Q(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } x < 2/3 \\ [0, 1] & \text{se } x = 2/3 \\ \{1\} & \text{se } x > 2/3 \end{cases}.$$

Dunque  $Ne(\Gamma) = \{(0, 0), (2/3, 1/3), (1, 1)\}$ .

Alcune applicazioni:

## Gioco del pollo

Due piloti corrono verso un burrone, possono sterzare ( $s$ ) o tirare dritto ( $d$ ). In strategie pure:

$P \backslash Q$	$s$	$d$
$s$	(5, 5)	(1, 10)
$d$	(10, 1)	(0, 0)

da cui  $Ne(\Gamma) = \{(s, d), (d, s)\}$ . In strategie miste  $X = Y = [0, 1]$  e

$$f(x, y) = x + 10y - 6xy, \quad g(x, y) = 10x + y - 6xy,$$

da cui

$$Ne(\Gamma) = \left\{ (0, 1), \left( \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right), (1, 0) \right\}$$

Il nuovo equilibrio descrive la situazione in cui entrambi i piloti sterzano a  $5/6$  del percorso.

**Nota:** Questo è un esempio di **deterrenza**.

## Gioco dei candidati

Due candidati  $P$  e  $Q$  si sfidano alle elezioni e propongono programmi  $x, y \in [0, 1]$ , ogni elettore vota per il programma a lui più vicino:

$$R_P(y) = \left\{ x \in [0, 1] : \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2} \right\} = [1-y, 1]$$

$$R_Q(x) = \left\{ y \in [0, 1] : \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2} \right\} = [0, 1-x].$$

Dunque  $Ne(\Gamma) = \{(x, 1-x) : x \in [0, 1]\}$ . Versione con elettorato non neutrale: sia  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la densità e  $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ . Allora

$$R_P(y) = \left\{ x \in [0, 1] : \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$R_Q(x) = \left\{ y \in [0, 1] : \Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \right\},$$

per esempio se  $\varphi(t) = 2t$  si ottiene

$$Ne(\Gamma) = \{(x, \sqrt{2}-x) : x \in [\sqrt{2}-1, 1]\}.$$

## Duopolio di Cournot

Consideriamo un mercato con due produttori  $P$ ,  $Q$ , volume  $a > 0$ , costo unitario di produzione  $c > 0$  e funzione di domanda  $p(x, y) = \max\{a - (x + y), 0\}$ . I pay-off sono  $f, g : [0, a]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiti da

$$f(x, y) = x(p(x, y) - c) = \begin{cases} -x^2 - xy + (a - c)x & \text{se } x + y < a \\ -cx & \text{se } x + y \geq a, \end{cases}$$

$$g(x, y) = y(p(x, y) - c) = \begin{cases} -y^2 - xy + (a - c)y & \text{se } x + y < a \\ -cy & \text{se } x + y \geq a. \end{cases}$$

Per il Teorema di Nash  $Ne(\Gamma) \neq \emptyset$ . Si ha

$$R_P(y) = \begin{cases} \left\{ \frac{a - c - y}{2} \right\} & \text{se } y \leq a - c \\ \{0\} & \text{se } y > a - c \end{cases}, R_Q(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{a - c - x}{2} \right\} & \text{se } x \leq a - c \\ \{0\} & \text{se } x > a - c. \end{cases}$$

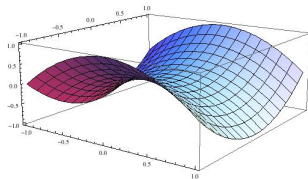
Si ricava

$$Ne(\Gamma) = \left\{ \left( \frac{a - c}{3}, \frac{a - c}{3} \right) \right\}.$$

## Definizione

Un gioco  $\Gamma = (X, Y, f, g)$  è detto a somma nulla se per ogni  $(x, y) \in X \times Y$

$$f(x, y) + g(x, y) = 0.$$



Un gioco a somma nulla si rappresenta come  $\Gamma = (X, Y, f)$ . Una coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  è un equilibrio di  $\Gamma$  se e solo se

$$\sup_X f(\cdot, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y f(\bar{x}, \cdot)$$

In questo caso diciamo che  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$  (punto di sella).

Se  $f$  ha un punto di sella  $(\bar{x}, \bar{y})$ , allora vale l'eguaglianza del minimax

$$(MM) \sup_X \inf_Y f = \inf_Y \sup_X f.$$

- Si ha per ogni  $(x, y) \in X \times Y$

$$\inf_Y f(x, \cdot) \leq f(x, y) \leq \sup_X f(\cdot, y)$$

da cui passando all'estremo superiore in  $X$  e all'estremo inferiore in  $Y$

$$\sup_X \inf_Y f \leq \inf_Y \sup_X f.$$

- Viceversa se  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$

$$\inf_Y \sup_X f \leq \sup_X f(\cdot, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y f(\bar{x}, \cdot) \leq \sup_X \inf_Y f.$$

L'implicazione inversa è **falsa**, dunque spesso cerchiamo di dimostrare solo (MM) (teoria del minimax).

## Esempio

Sia  $\Gamma$  rappresentato dalla tabella ( $g = -f$ )

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	1	2
$x_2$	0	1
$x_3$	-1	0

Si ha  $sp(f) = (x_1, y_1)$  e (MM).

## Esempio

Siano  $X = Y = (0, 1)$ ,  $f(x, y) = xy$ . Allora vale (MM):

$$\sup_{x \in (0,1)} \inf_{y \in (0,1)} xy = \sup_{x \in (0,1)} 0 = 0$$

$$\inf_{y \in (0,1)} \sup_{x \in (0,1)} xy = \inf_{y \in (0,1)} y = 0,$$

ma  $sp(f) = \emptyset$  ( $xy \neq 0$  per ogni  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ ).

## Esempio

Sia  $\Gamma$  rappresentato dalla tabella ( $g = -f$ )

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	1	2
$x_2$	0	1
$x_3$	-1	0

Si ha  $sp(f) = (x_1, y_1)$  e (MM).

## Esempio

Siano  $X = Y = (0, 1)$ ,  $f(x, y) = xy$ . Allora vale (MM):

$$\sup_{x \in (0,1)} \inf_{y \in (0,1)} xy = \sup_{x \in (0,1)} 0 = 0$$

$$\inf_{y \in (0,1)} \sup_{x \in (0,1)} xy = \inf_{y \in (0,1)} y = 0,$$

ma  $sp(f) = \emptyset$  ( $xy \neq 0$  per ogni  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ ).

## Teorema di von Neumann

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  compatti convessi,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  bilineare. Allora  $sp(f) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Poniamo

$$F(x) = \{y \in Y : f(x, y) = \inf_Y f(x, \cdot)\}.$$

Allora  $F : X \rightarrow 2^Y$  ha valori compatti convessi. Poniamo

$$\alpha(x) = \inf_Y f(x, \cdot)$$

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  t.c. per ogni  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$

$$d((x, y), (x', y')) \leq \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$$

Siano  $x, x' \in X$  t.c.  $|x - x'| \leq \delta$ , allora per ogni  $y \in Y$

$$\alpha(x) \leq f(x, y) \leq \sup_Y |f(x, \cdot) - f(x', \cdot)| + f(x', y) \leq \varepsilon + f(x', y),$$

da cui  $\alpha(x) \leq \alpha(x') + \varepsilon$ . Così si prova che  $\alpha$  è continua.

## Teorema di von Neumann

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  compatti convessi,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  bilineare. Allora  $sp(f) \neq \emptyset$ .

**Dimostrazione.** Poniamo

$$F(x) = \{y \in Y : f(x, y) = \inf_Y f(x, \cdot)\}.$$

Allora  $F : X \rightarrow 2^Y$  ha valori compatti convessi. Poniamo

$$\alpha(x) = \inf_Y f(x, \cdot)$$

Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  t.c. per ogni  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$

$$d((x, y), (x', y')) \leq \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| \leq \varepsilon$$

Siano  $x, x' \in X$  t.c.  $|x - x'| \leq \delta$ , allora per ogni  $y \in Y$

$$\alpha(x) \leq f(x, y) \leq \sup_Y |f(x, \cdot) - f(x', \cdot)| + f(x', y) \leq \varepsilon + f(x', y),$$

da cui  $\alpha(x) \leq \alpha(x') + \varepsilon$ . Così si prova che  $\alpha$  è continua.

Proviamo che  $gr(F)$  è chiuso: per ogni successione  $(x_k, y_k)$  in  $gr(F)$  t.c.  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$  si ha  $f(x_k, y_k) = \alpha(x_k)$  da cui  $f(x, y) = \alpha(x)$  cioè  $(x, y) \in gr(F)$ . Dunque  $F$  è s.c.s.

Similmente si vede che

$$G(y) = \{x \in X : f(x, y) = \sup_x f(\cdot, y)\}.$$

è s.c.s. a valori chiusi convessi. Così  $G \times F : X \times Y \rightarrow 2^{X \times Y}$  è s.c.s. a valori chiusi convessi. Per il Teorema di Kakutani esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in fix(G \times F)$ , ovvero

$$\inf_Y f(\bar{x}, \cdot) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_X f(\cdot, \bar{y}).$$

Dunque  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$ . □

## Esempio

Poniamo  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $Y = [0, 1]$  e

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1y - x_2y$$

Allora si ha  $(0, 0, 0) \in sp(f)$ , in particolare

$$\sup_X \inf_Y f = 0 = \inf_Y \sup_X f$$

Proviamo che  $gr(F)$  è chiuso: per ogni successione  $(x_k, y_k)$  in  $gr(F)$  t.c.  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$  si ha  $f(x_k, y_k) = \alpha(x_k)$  da cui  $f(x, y) = \alpha(x)$  cioè  $(x, y) \in gr(F)$ . Dunque  $F$  è s.c.s.

Similmente si vede che

$$G(y) = \{x \in X : f(x, y) = \sup_x f(\cdot, y)\}.$$

è s.c.s. a valori chiusi convessi. Così  $G \times F : X \times Y \rightarrow 2^{X \times Y}$  è s.c.s. a valori chiusi convessi. Per il Teorema di Kakutani esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in fix(G \times F)$ , ovvero

$$\inf_Y f(\bar{x}, \cdot) = f(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_X f(\cdot, \bar{y}).$$

Dunque  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$ . □

## Esempio

Poniamo  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $Y = [0, 1]$  e

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1y - x_2y$$

Allora si ha  $(0, 0, 0) \in sp(f)$ , in particolare

$$\sup_X \inf_Y f = 0 = \inf_Y \sup_X f$$

Generalizzazione (vale anche in dimensione infinita):

## Teorema di Fan

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  compatti convessi,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

- $f(\cdot, y)$  s.c.s. quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $f(x, \cdot)$  s.c.i. quasi-convessa per ogni  $x \in X$ .

Allora vale (MM).

**Nota:** Esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  t.c.

$$\sup_X \inf_Y f = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y \sup_X f,$$

ma non necessariamente  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$ .

Per dimostrarlo serve un nuovo risultato di analisi multivoca. Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : X \rightarrow 2^X$  t.c.

$$(KKM) \text{ conv}(x_1, \dots, x_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^k F(x_i) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in X.$$

... in particolare,  $fix(F) = X!$

Generalizzazione (vale anche in dimensione infinita):

## Teorema di Fan

Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  compatti convessi,  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.

- $f(\cdot, y)$  s.c.s. quasi-concava per ogni  $y \in Y$
- $f(x, \cdot)$  s.c.i. quasi-convessa per ogni  $x \in X$ .

Allora vale (MM).

**Nota:** Esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  t.c.

$$\sup_X \inf_Y f = f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_Y \sup_X f,$$

ma non necessariamente  $(\bar{x}, \bar{y}) \in sp(f)$ .

Per dimostrarlo serve un nuovo risultato di analisi multivoca. Siano  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : X \rightarrow 2^X$  t.c.

$$(KKM) \text{ conv}(x_1, \dots, x_k) \subseteq \bigcup_{i=1}^k F(x_i) \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in X.$$

... in particolare,  $fix(F) = X!$

## Teorema di Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$  a valori chiusi soddisfacente (KKM). Allora per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$  si ha

$$\bigcap_{i=1}^k F(x_i) \neq \emptyset.$$

**Dimostrazione.** Per assurdo: esistano  $x_1, \dots, x_k \in X$  t.c.

$$(*) \quad \bigcap_{i=1}^k F(x_i) = \emptyset.$$

Sia  $C = \text{conv}(x_1, \dots, x_k)$  (compatto convesso) e per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$  poniamo  $\varphi_i(x) = d(x, F(x_i))$ , così  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  è continua (1-Lipschitz). Per (\*), per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  esiste  $i \in \{1, \dots, k\}$  t.c.  $\varphi_i(x) > 0$ . Per ogni  $x \in C$  poniamo

$$S_x = \{i \in \{1, \dots, k\} : \varphi_i(x) > 0\}, \quad f(x) = \frac{\sum_{i \in S_x} \varphi_i(x) x_i}{\sum_{i \in S_x} \varphi_i(x)},$$

allora  $f : C \rightarrow C$  è continua. Per il Teorema di Schauder esiste  $\bar{x} \in \text{fix}(f)$ , ovvero

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \in \text{conv}\{x_i : i \in S_{\bar{x}}\}$$

Per (KKM) esiste  $i \in S_{\bar{x}}$  t.c.  $\bar{x} \in F(x_i)$ , da cui  $\varphi_i(\bar{x}) = 0$ , assurdo. □

## Teorema di Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$  a valori chiusi soddisfacente (KKM). Allora per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$  si ha

$$\bigcap_{i=1}^k F(x_i) \neq \emptyset.$$

**Dimostrazione.** Per assurdo: esistano  $x_1, \dots, x_k \in X$  t.c.

$$(*) \bigcap_{i=1}^k F(x_i) = \emptyset.$$

Sia  $C = \text{conv}(x_1, \dots, x_k)$  (compatto convesso) e per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$  poniamo  $\varphi_i(x) = d(x, F(x_i))$ , così  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  è continua (1-Lipschitz). Per (\*), per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  esiste  $i \in \{1, \dots, k\}$  t.c.  $\varphi_i(x) > 0$ . Per ogni  $x \in C$  poniamo

$$S_x = \{i \in \{1, \dots, k\} : \varphi_i(x) > 0\}, \quad f(x) = \frac{\sum_{i \in S_x} \varphi_i(x) x_i}{\sum_{i \in S_x} \varphi_i(x)},$$

allora  $f : C \rightarrow C$  è continua. Per il Teorema di Schauder esiste  $\bar{x} \in \text{fix}(f)$ , ovvero

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \in \text{conv}\{x_i : i \in S_{\bar{x}}\}$$

Per (KKM) esiste  $i \in S_{\bar{x}}$  t.c.  $\bar{x} \in F(x_i)$ , da cui  $\varphi_i(\bar{x}) = 0$ , assurdo. □

## Corollario

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$  a valori chiusi, con almeno un valore compatto, soddisfacente (KKM). Allora

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

**Dimostrazione.** Sia  $x_0 \in X$  t.c.  $F(x_0)$  è compatto. Poniamo

$$G(x) = F(x) \cap F(x_0),$$

così  $G : X \rightarrow 2^X$  ha valori compatti. Per il Teorema KKM (applicato a  $F$ ), per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$  si ha

$$\bigcap_{i=1}^k G(x_i) = \bigcap_{i=0}^k F(x_i) \neq \emptyset.$$

Per il Teorema di intersezione di Cantor esiste

$$\bar{x} \in \bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} F(x). \quad \square$$

## Corollario

Sia  $F : X \rightarrow 2^X$  a valori chiusi, con almeno un valore compatto, soddisfacente (KKM). Allora

$$\bigcap_{x \in X} F(x) \neq \emptyset.$$

**Dimostrazione.** Sia  $x_0 \in X$  t.c.  $F(x_0)$  è compatto. Poniamo

$$G(x) = F(x) \cap F(x_0),$$

così  $G : X \rightarrow 2^X$  ha valori compatti. Per il Teorema KKM (applicato a  $F$ ), per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in X$  si ha

$$\bigcap_{i=1}^k G(x_i) = \bigcap_{i=0}^k F(x_i) \neq \emptyset.$$

Per il Teorema di intersezione di Cantor esiste

$$\bar{x} \in \bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} F(x). \quad \square$$

**Dimostrazione del Teorema di Fan.** Per assurdo sia

$$(\#) \sup_X \inf_Y f < c < \inf_Y \sup_X f.$$

Poniamo  $K = X \times Y$  e

$$F(x, y) = \{(x', y') \in K : f(x, y') \leq c \text{ o } f(x', y) \geq c\},$$

così  $F : K \rightarrow 2^K$  ha valori non vuoti compatti, e soddisfa **(KKM)**. Per assurdo, siano  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in K$  t.c. esiste

$$(x', y') \in \text{conv}((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)) \setminus \bigcup_{i=1}^k F(x_i, y_i).$$

Allora per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$  abbiamo  $x_i \in f(\cdot, y')^c$ ,  $y_i \in f(x', \cdot)^c$  (convessi), da cui anche

$$f(x', y') < c < f(x', y') \text{ (assurdo!).}$$

Per il Corollario esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$  t.c.  $(\bar{x}, \bar{y}) \in F(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in K$ . Due casi:

- $f(x, \bar{y}) \leq c$  per ogni  $x \in X$ , allora

$$c \geq \sup_X f(\cdot, \bar{y}) \geq \inf_Y \sup_X f \text{ contro } (\#)$$

- esiste  $x \in X$  t.c.  $f(x, \bar{y}) > c$ , allora  $f(\bar{x}, y) \geq c$  per ogni  $y \in Y$  e

$$c \leq \inf_Y f(\bar{x}, \cdot) \leq \sup_X \inf_Y f \text{ contro } (\#). \quad \square$$

## Esempio

Torniamo a considerare il gioco

$P \backslash Q$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	1	2
$x_2$	0	1
$x_3$	-1	0

Passiamo alle strategie miste:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1\},$$

$$Y = [0, 1],$$

$$f(x_1, x_2, y) = 2x_1 + x_2 - y$$

Le ipotesi del Teorema di Fan sono verificate, un punto di sella è  $(1, 0, 1)$ .

- J.P. Aubin, Mathematical methods of game and economic theory (1979)
- S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem (1941)
- B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für  $n$ -dimensionale Simplexe (1926)
- E. Michael, Continuous selections (1956)
- O. Morgenstern, J. von Neumann, Theory of games and economic behavior (1953)
- J.F. Nash, Non-cooperative games (1951)