

Analisi Matematica 2

Monica Marras - Universita' degli Studi di Cagliari

mmarras@unica.it

Argomenti del corso

1. Serie numeriche. Successioni e serie di funzioni.
2. Funzioni di due o piu' variabili.
3. Continuita', derivabilita' parziale, differenziabilita'. Funzioni composte.
4. Formula di Taylor e Mac-Laurin.
5. Massimi e minimi relativi, assoluti e condizionati.
6. Integrali doppi e tripli.
7. Integrali curvilinei e superficiali.
8. Forme differenziali lineari e forme esatte.
9. Formule di Green-Gauss e Teorema di Stokes.

Testo consigliato:

- Elementi di Analisi Matematica 2

casa editrice Zanichelli

autori Paolo Marcellini, Carlo Sbordone.

- Esercitazioni di Matematica Due. Prima e Seconda parte

casa editrice Zanichelli

autori Paolo Marcellini, Carlo Sbordone.

altro testo

- Analisi matematica 2

casa editrice Zanichelli

autori M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa

- Esercizi di Analisi matematica 2

casa editrice Zanichelli

autori S. Salsa, A. Squellati

Gruppo Telegram Analisi Matematica 2 2025/26



<https://t.me/+2D8yCKePbzA0NTU0>

Serie numeriche

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una successione a valori reali.

Si dice **serie di termine generale** a_n : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, la successione delle somme parziali (o ridotte)

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

$$S_0 = a_0,$$

$$S_1 = a_0 + a_1,$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2,$$

\vdots

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Definizione

La serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é **convergente** con somma S se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \quad \text{finito};$$

la serie si dice **divergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$;

la serie si dice **indeterminata** (oscillante) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \text{non esiste}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad \text{Serie geometrica di ragione } q$$

- **converge** se $|q| < 1$ e ha per somma $S = \frac{1}{1-q}$,
- **diverge** se $q \geq 1$,
- **oscilla** se $q \leq -1$.

Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$ e $|q| < 1$ allora $S = q^{n_0} \frac{1}{1-q}$,

q^{n_0} = primo termine della serie geometrica.

Serie geometrica

Infatti se $q \neq 1$, si ha $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

(se $q = 1$ allora $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$ e la serie diverge)

moltiplicando membro a membro per $1 - q$ ($\neq 0$) si ottiene

$$S_n(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

da cui $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

e passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) \quad \text{Serie telescopica}$$

Si ha $S_n = b_0 - b_{n+1}$

- **converge** con somma $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = b_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ é finito,

- **diverge** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = +\infty$

- **oscilla** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ non esiste

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{Serie di Mengoli (particolare serie telescopica)}$$

Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

La serie di Mengoli converge con somma $S = 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad \text{Serie armonica generalizzata}$$

$$\left(\text{Se } \alpha = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ Serie armonica} \right)$$

- converge se $\alpha > 1$,
- diverge se $\alpha \leq 1$

Esercizio

Dire se convergono e, se possibile, determinare la somma delle seguenti serie

$$1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$q = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow S = \frac{q^{n_0}}{1-q} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$2) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}} \right) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{e^2}$$

Serie numeriche, condizione necessaria di convergenza

Teorema

Condizione necessaria affinché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga é che il limite del termine generale tenda a zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

(la serie può convergere o divergere, non é indeterminata)

Nota Le serie $\sum a_n$, a termini non negativi ($a_n \geq 0$) può solo convergere o divergere (non può essere indeterminata).

Infatti la successione delle somme parziali essendo costruita con termini non negativi, é una successione crescente:

$$S_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Dal teorema del limite di una successione monotona (in questo caso crescente) si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n\}$$

Serie numeriche a termini non negativi, criteri sufficienti di convergenza

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \textit{definitivamente}$$

allora

- se $\sum b_n$ converge, converge anche la serie $\sum a_n$,
- se $\sum a_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum b_n$.

La serie $\sum b_n$ é detta **maggiorante**, la serie $\sum a_n$ é detta **minorante**.

Dimostrazione

Siano

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad e \quad S_n^* = \sum_{k=0}^n b_k,$$

per ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$

e passando alle somme parziali si ha: $0 \leq S_n \leq S_n^*$.

Le serie date sono a termini non negativi e perciò non possono essere indeterminate.

Si ottiene così la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$① \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{2}{n^4}$$

$$② \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n^3}{n^3}$$

Confronto asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni asintotiche $a_n \sim b_n$ cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento (entrambe convergenti oppure entrambe divergenti).

Dimostrazione

Supponiamo che $a_n \sim b_n$, allora per definizione di limite di successione:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon$ cioè

$$(1 - \varepsilon)b_n < a_n < (1 + \varepsilon)b_n.$$

Applicando il teorema del confronto si ha la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$① \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{1 + n^3}$$

$$② \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

criterio della radice Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

allora:

- se $l < 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ converge,
- se $l > 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ diverge,
- se $l = 1$, \Rightarrow il criterio é inefficace.

Dimostrazione

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} = l < 1$.

e sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$.

Per definizione di limite di successione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1, \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$$

$$\text{cioé } a_n < (l + \varepsilon)^n, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Per il criterio del confronto, la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica $\sum (l + \varepsilon)^n$.

Se invece $l > 1$ allora $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$ e perciò non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum a_n$ diverge (essendo a termini non negativi)

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^n}$$

$$2 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

allora

- se $l < 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ converge,
- se $l > 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ diverge,
- se $l = 1$, \Rightarrow il criterio é inefficace.

condizioni sufficienti, criterio del rapporto

Dimostrazione Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$

Per definizione di limite di successione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = x < 1.$$

Allora si ha (possiamo supporre $\nu_\varepsilon = 1$)

$$a_2 < a_1 x, \quad a_3 < a_1 x^2, \quad \dots, \quad a_n < a_1 x^{n-1}.$$

Per il criterio del confronto la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica di termine generale $x = l + \varepsilon < 1$.

Se $l > 1$, allora dalla definizione di limite di successione si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ da un certo indice ν in poi.

Allora la successione a_n è strettamente crescente e non può convergere a zero. La condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta.

Serie a termini di segno variabile

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione di segno variabile, la serie $\sum a_n$ si dice **assolutamente convergente** se converge la serie (a termini non negativi) $\sum |a_n|$.

Teorema

Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente allora converge.

CONVERGENZA ASSOLUTA \Rightarrow CONVERGENZA ORDINARIA (o CONVERGENZA SEMPLICE).

non è vero il viceversa

Esempio

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente.

Si dimostra che però converge semplicemente (col Criterio di Leibniz).

Criterio di Leibniz

Data la serie di segno alterno $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0, \forall n$,

Se:

i) la successione $\{a_n\}$ è decrescente;

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

allora la serie è convergente.

Inoltre, le somme parziali di indice pari approssimano la somma per eccesso, quelle di indice dispari per difetto. Il resto della serie è maggiorato, in valore assoluto, dal primo termine trascurato.

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \downarrow S; \quad S = \text{somma della serie}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \uparrow S;$$

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n, \quad S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Esercizio

Utilizzando il criterio di Leibniz, dire se le serie convergono.

$$① \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$② \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n},$$

$$③ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - n},$$

$$④ \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$