

Successioni di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale

Definizione

Sia I un insieme di numeri reali e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali definite in I , $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$

Si dice che f_n converge puntualmente in I verso la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se risulta

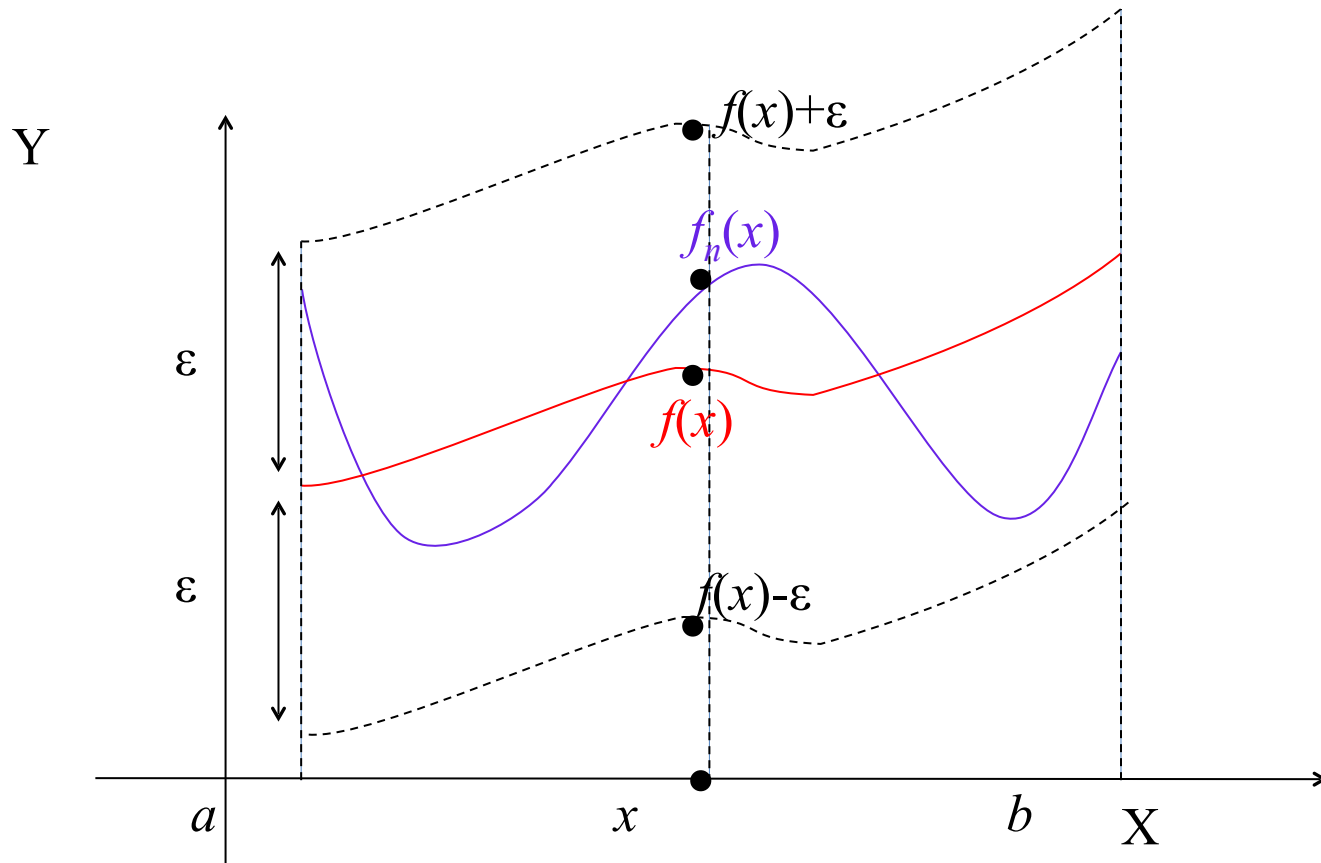
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I;$$

Cioè se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in I$ $\exists v_{\varepsilon, x} \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall n > v_{\varepsilon, x}$$

Successioni di funzioni: convergenza puntuale

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > v_{\varepsilon, x}$$



Successioni di funzioni: convergenza puntuale

Per stabilire la convergenza puntuale si fissa $x \in I$ e si considera la successione numerica $\{f_n(x)\}$

Esempio

Dire se converge la successione $f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}$ $x \in (0,1]$

Si ha

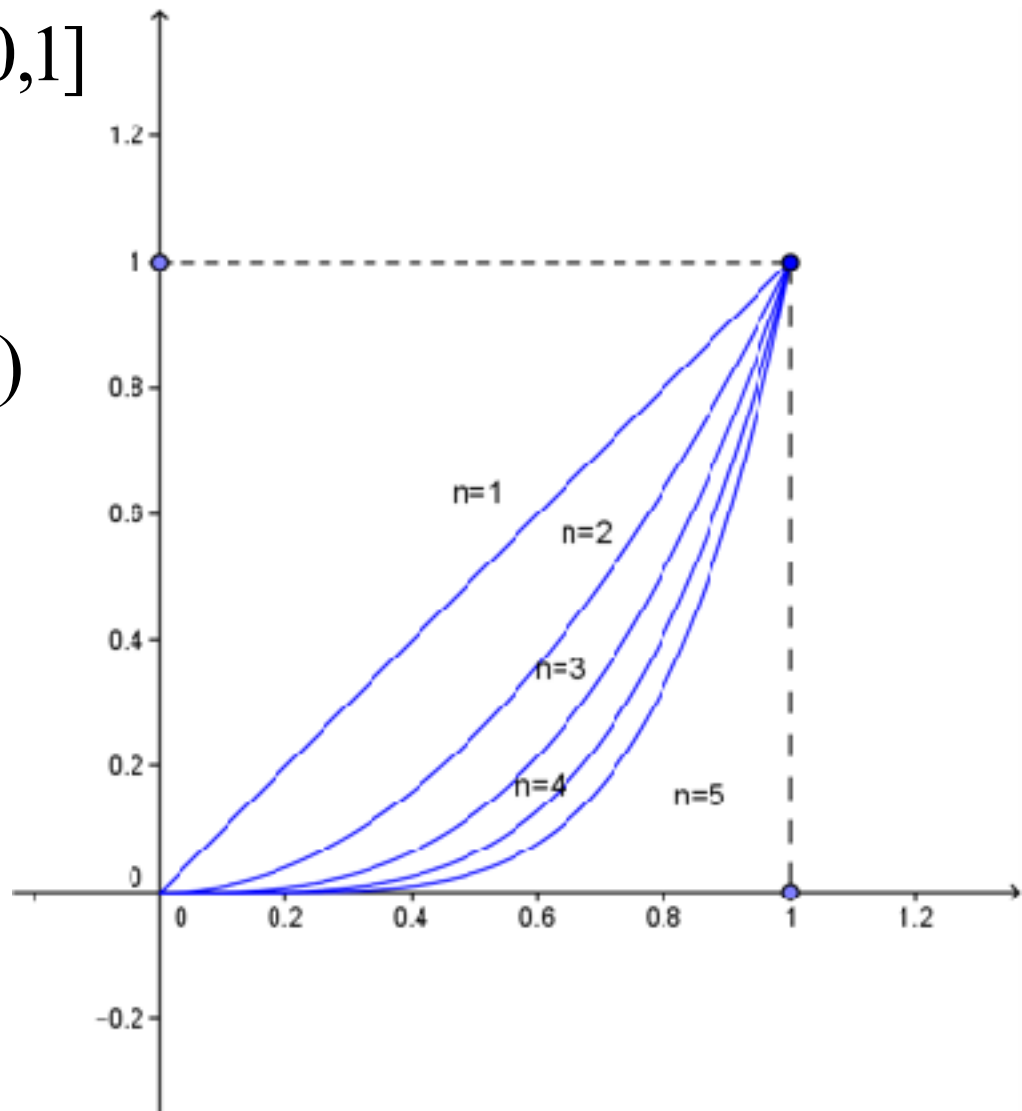
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2} + x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = x^n \quad x \in [0,1]$

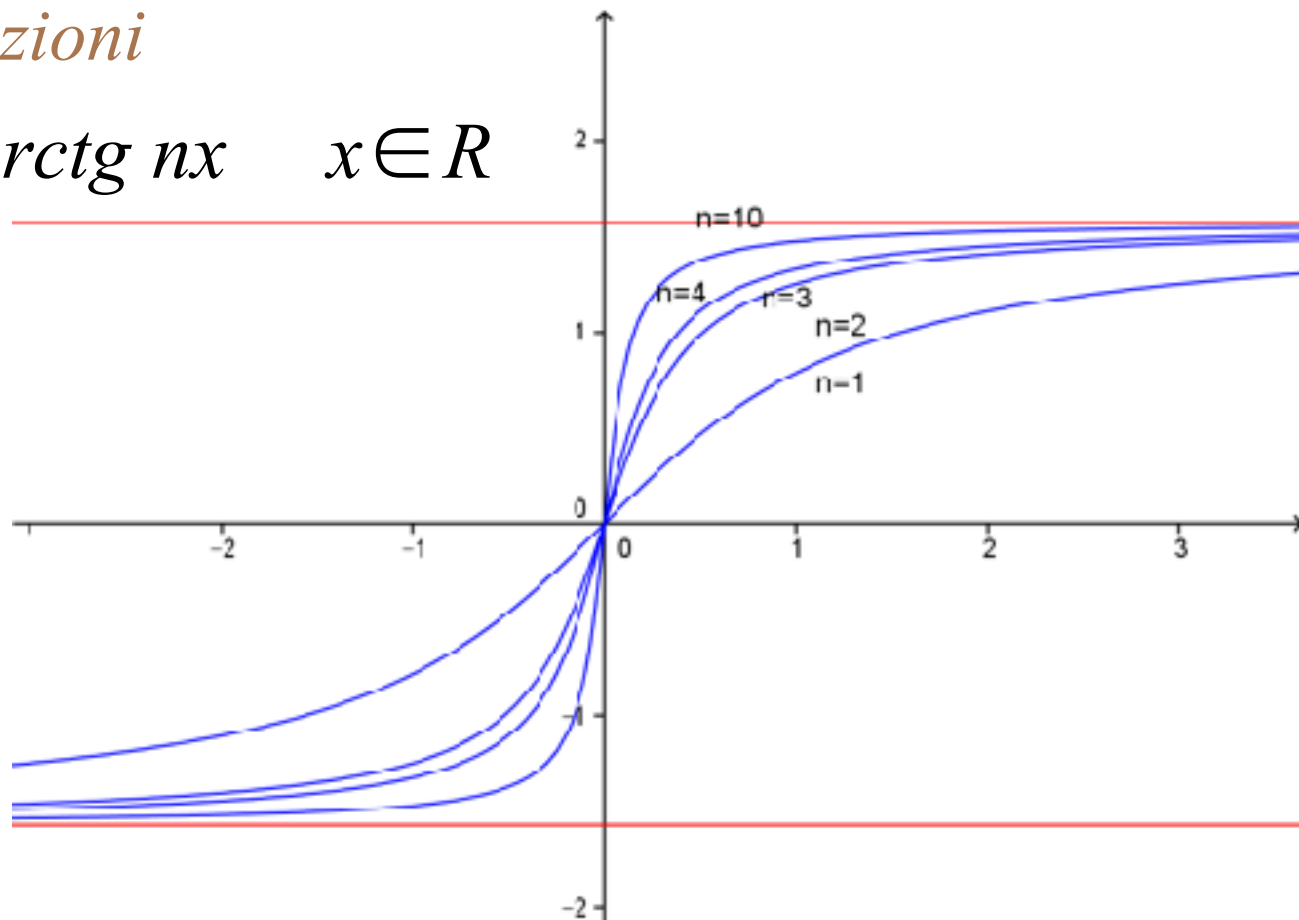
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \quad \text{se } x \in [0,1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1 \quad \text{se } x = 1$$



Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \quad x \in \mathbb{R}$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Successioni di funzioni

*In generale, fissato $\varepsilon > 0$, il numero $\nu_{\varepsilon, x}$ dipende dal punto x ; se invece $\nu_{\varepsilon, x}$ non dipende da x allora si parla di **convergenza uniforme**:*

Definizione

$\{f_n(x)\}$ converge **uniformemente** in I verso $f(x)$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (ν_ε non dipende da x) tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon, \quad \forall x \in I$$

Successioni di funzioni

convergenza uniforme \Rightarrow convergenza puntuale

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, se ν_ε è tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$$

allora per ogni $\forall x \in I$ si può scegliere $\nu_{\varepsilon, x} = \nu_\varepsilon$ e quindi la disuguaglianza vale anche $\forall n > \nu_{\varepsilon, x} = \nu_\varepsilon$.

Il viceversa in generale non vale.

Successioni di funzioni

Se le f_n, f sono limitate in I allora $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente ad f in I se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Esercizio.

Dimostrare che la successione $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ converge uniformemente in $[0,1]$

Fissato x in $[0,1]$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+nx} = 0$

Successioni di funzioni, convergenza uniforme

Vediamo se la convergenza è uniforme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} \left| \frac{x}{1+nx} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

Quindi $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ converge uniformemente a $f(x)=0$

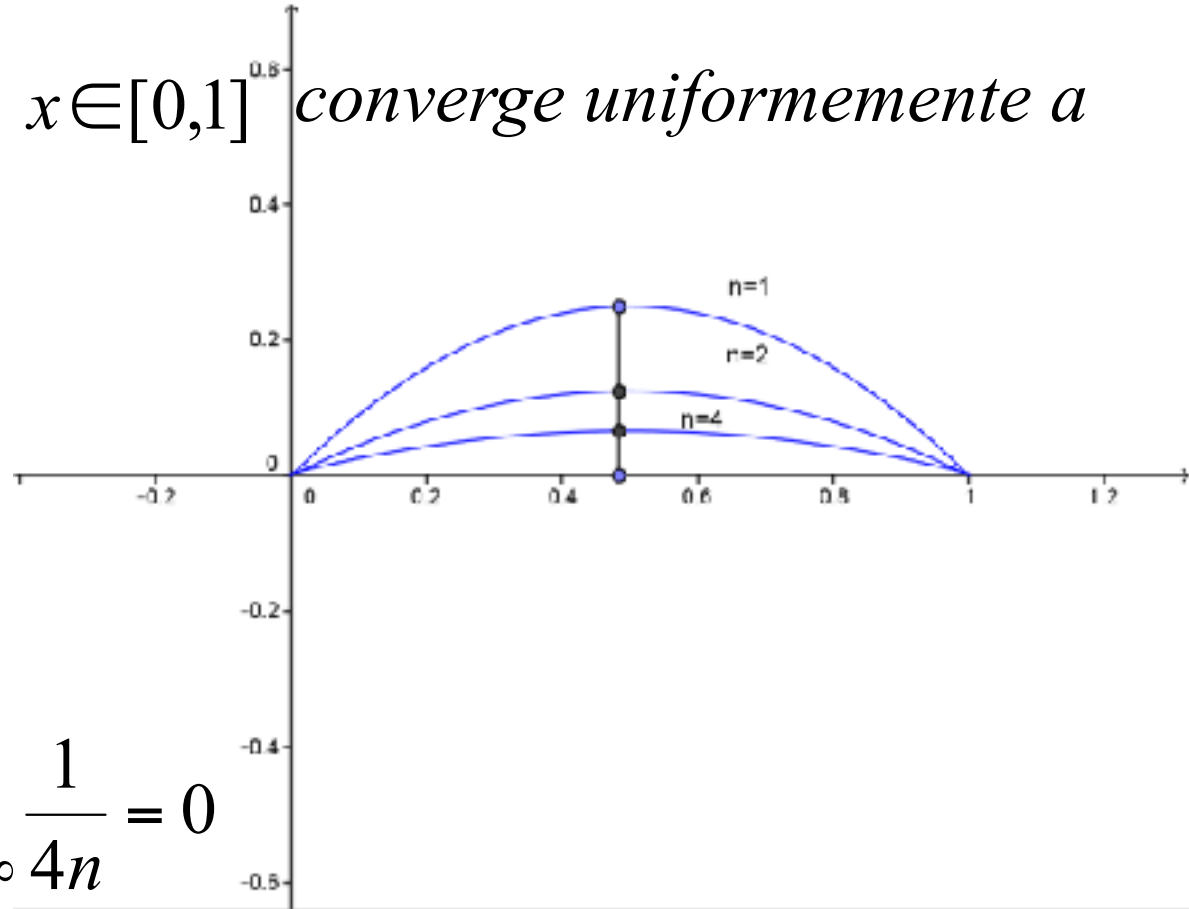
Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = \frac{x - x^2}{n}$, $x \in [0,1]$ converge uniformemente a zero.

Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n} = 0$$



Successioni di funzioni

Teorema (continuità del limite uniforme di funzioni continue)

Se $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente in I verso $f(x)$, e tutte le $f_n(x)$ sono continue in x_0 , allora anche $f(x)$ è continua in x_0 .

In generale la convergenza puntuale di una successioni di funzioni continue non assicura la continuità della funzione limite

Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \quad x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in quanto la funzione limite non è continua

Serie di funzioni

Serie di funzioni

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali definite in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $\forall x \in I$ (x fissato) la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

è convergente, cioè se la successione delle somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

converge puntualmente in I , allora si dice che la serie di

funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$

è convergente puntualmente in I .

Serie di funzioni

Definizione (convergenza totale)

Se esistono dei numeri reali $M_n \geq 0$ tali che

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad x \in I, \quad n \in \mathbb{N}$$

e se la serie numerica $\sum M_n$ è convergente in I , allora si

*dice che $\sum f_n$ converge **totalmente** in I .*

Serie di funzioni

Definizione (convergenza uniforme)

La serie $\sum f_n(x)$ converge *uniformemente* in I verso $S(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\}$ converge *uniformemente* in I verso $S(x)$.

Teorema. La convergenza totale di una serie di funzioni implica quella uniforme:

convergenza totale \Rightarrow convergenza uniforme

Teorema. La somma di una serie di funzioni continue

convergente uniformemente è anch'essa continua.

Serie di funzioni

Esercizio

Dire se converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

*Si ha $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge
(serie armonica generalizzata)*

$\Rightarrow \sum \frac{\cos nx}{n^2}$ *converge totalmente*

\Rightarrow *converge uniformemente \Rightarrow converge puntualmente*

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x^2)^n$$

Serie geometrica

$$S_n(x) = \frac{1 - [q(x)]^{n+1}}{1 - [q(x)]} = \frac{1 - (1-x^2)^{n+1}}{x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (1-x^2)^{n+1}}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ \infty & x = 0 \\ \text{indeterminata} & x \geq \sqrt{2}, x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - x^2)^n$$

Serie geometrica

*Converge solo puntualmente a $S(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $x \neq 0$
perché S non è continua in I*

Converge uniformemente in ogni intervallo del tipo

$$[a, b] \subset (0, \sqrt{2}) \text{ o } [a, b] \subset (-\sqrt{2}, 0)$$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \quad \text{Serie telescopica}$$

$$\text{Si ha } S_n(x) = f_0(x) - f_{n+1}(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{- converge con somma } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = x, \quad |x| \leq 1$$

- *diverge* se $x > 1$

- *oscilla* se $x < -1$

Serie di funzioni

Teorema di integrazione per serie (termine a termine)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in $[a,b]$, se la

serie $\sum f_n(x)$ è convergente uniformemente in $[a,b]$ verso

$S(x)$ allora

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b (\sum f_n(x))dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

Esercizio

Dire se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$ *è integrabile termine a termine*

in $x \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$

Serie di funzioni

Teorema di derivazione per serie (termine a termine)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni derivabili in (a,b) con derivata continua in $[a,b]$. Se

i) $\sum f_n(x)$ converge almeno in un punto $x_0 \in [a,b]$

*ii) $\sum f'_n(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ con somma $A(x)$
allora anche $\sum f_n(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ e se $S(x)$ è
la sua somma, si ha*

$$S'(x) = \left(\sum f_n(x) \right)' = \sum f'_n(x) = A(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Esercizio

Dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *è derivabile termine a termine*

Serie di funzioni

Serie di potenze

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, si chiama *serie di potenze* di punto iniziale zero, la serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ Sono i coefficienti.

L'intervallo I in cui tale serie converge si chiama *intervallo di convergenza*. Il *raggio di convergenza* è l'estremo superiore r di tale intervallo

Serie di potenze

Si possono avere 3 casi:

1) $r = 0$ allora la serie di potenze $\sum a_n x^n$ converge solo in $x = 0$

2) $0 < r < +\infty$ allora $\sum a_n x^n$
converge assolutamente per $x \in (-r, r)$
e totalmente in ogni $[-\delta, \delta] \subset (-r, r)$
non converge per $|x| > r$

3) $r = +\infty$ allora $\sum a_n x^n$
converge assolutamente in ogni $x \in R$
e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato
di R : $[-\delta, \delta] \subset R$

Serie di potenze

Teorema di Cauchy

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

allora $r = \frac{1}{l}$

Serie di potenze

Teorema di D'Alembert

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ se $a_n \neq 0 \quad \forall n$,

e se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$

allora $r = \frac{1}{l}$ (se $l = 0 \rightarrow r = +\infty$)

Serie di potenze

Teorema: raggio di convergenza della serie derivata

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.

Dimostrazione: data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $a_n \neq 0 \quad \forall n,$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

e quindi per il criterio di D'Alembert la serie di potenze e la sua derivata hanno lo stesso raggio di convergenza

Serie di potenze

Teorema: derivazione e integrazione della serie di potenze

Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza non nullo e se $f(x)$ è la sua somma, cioè

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall |x| < \rho, \text{ con } \rho > 0,$$

Allora anche f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall |x| < \rho,$$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall |x| < \rho,$$

Serie di potenze

Esercizio

Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5n}{2^n} x^n$$

Si trova $r=2$, quindi $I=(-2, 2)$

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2} \quad \text{di centro } x_0 = -1$$

Si trova $r = 1$ quindi $I = (-2, 0)$

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n$$

Si trova $r = +\infty$ quindi $I = R$

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n}$$

Si trova $r = 2$ quindi $I = (-1, 3)$

Serie di funzioni

Esercizio

Determinare per quali valori di x converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{x}{2} \right)^n + \frac{1}{x^n} \right]$$

Separo in due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$$

Sono due serie geometriche, una di ragione $\frac{x}{2}$ e l'altra di ragione $\frac{1}{x}$

Esercizio

Determinare per quali valori di x converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

Fissando x si ha una serie numerica e converge per $x < 0$. Si può trovare questo risultato utilizzando uno dei criteri sufficienti (per esempio quello della radice) studiati per le serie numeriche.

Se $x = 0$ si ha una serie armonica divergente. Se $x > 0$ la serie data non soddisfa la condizione necessaria di convergenza.

Esercizio

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n x \cos^n x$$

Esercizio

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} [e^{nx} - e^{(n+1)x}]$$

