

Analisi Matematica 2

19 settembre 2024

1. Illustrare la ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare il massimo e minimo assoluto di $f(x, y) = 2 - y^2 + e^{-x^2 - y^2}$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

2. Enunciare le formule di Gauss-Green e dimostrarne una. Utilizzandole calcolare

$$\int_{FD^+} 4x^2 y^2 dx$$

dove FD è la frontiera del dominio $D = \{0 \leq x \leq 2, x - 3 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$.

3. Definizione di forma differenziale lineare chiusa ed esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Data la forma

$$\omega = (6xe^{y^2}) dx + (1 + 6x^2ye^{y^2}) dy$$

- ◇ dire in quale insieme di \mathbb{R}^2 e' esatta;
 - ◇ calcolarne una primitiva;
 - ◇ calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove γ e' il segmento che unisce, nell'ordine, i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$.
4. Sviluppate a scelta solo uno dei due quesiti

a) Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzarlo per calcolare il flusso "uscente" del rotore di \mathbf{F} attraverso Σ , dove

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + e^{x^2 + z^2} \mathbf{k}$$

ed Σ e' la parte di superficie piana $z=1$ che si proietta sul cerchio $x^2 + y^2 = 1$

b) Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 e^n}{2^n} (x-1)^n :$$

- ◇ trovare l'intervallo di convergenza,
- ◇ studiare il comportamento agli estremi,
- ◇ trovare un intervallo dove la serie e' integrabile termine a termine.

Analisi Matematica 2

9 luglio 2024

1. Definizione di massimo e minimo assoluto. Illustrare la ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$.

Determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$ nell'insieme D definito come il triangolo di vertici $(2, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 3)$.

2. Enunciare una formula di Gauss-Green e utilizzandola calcolare

$$\iint_T \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2}},$$

dove T e' il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

3. Definizione di forma differenziale lineare esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Data la forma

$$\omega = 2 \ln(y^2 + 1) dx + \frac{4xy}{y^2 + 1} dy$$

- dimostrare che è esatta;
- calcolarne una primitiva;
- calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è il segmento che unisce, nell'ordine, i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

4. (a scelta)

a) Definizione di superficie regolare orientata con bordo. Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare il flusso del rotore di F attraverso la Σ :

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot}(F), n_e \rangle d\sigma$$

dove $F = (1 - 2x, z - 3x, 2z^2)$ e $\Sigma = \{z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$.

b)

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

- determinarne l'intervallo di convergenza;
- Condizioni sufficienti affinché una serie di funzioni sia integrabile termine a termine.
- scrivere, se esiste, un intervallo in cui essa può essere integrata termine a termine.

Analisi Matematica 2

25 giugno 2024

Svolgere 4 dei seguenti 5 esercizi :

1. Enunciare le formule di Green-Gauss. Dimostrare la prima ed utilizzandola calcolare $\int_{+FD} (3x + x^2y) dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.
2. Definizione di massimo e minimo relativo per una funzione $f(x, y)$. Condizioni sufficienti per avere un massimo o un minimo relativo e determinarli per la funzione $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy + 1$.
3. Enunciare il teorema di Stokes ed illustrare i suoi simboli. Utilizzandolo calcolare

$$\iint_{+\Sigma} \langle \text{rot}F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (z^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - x^2)$ e Σ è la porzione di superficie sferica $z = \sqrt{10 - x^2 - y^2}$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

4. Forme differenziali lineari nel piano e nello spazio. Enunciare la condizione necessaria affinché una forma differenziale sia esatta (con dimostrazione). Proprietà delle forme esatte. Dire se è esatta la forma $\omega = xy^2 dx + x^2y dy$ nel dominio $D = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2 - x\}$

5. Definizione di serie di potenze e intervallo di convergenza.

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n^2 + 1) e^{-nx}$, trovare l'intervallo di convergenza, al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Trovare un intervallo dove la serie e' integrabile termine a termine.

Analisi Matematica 2

11 giugno 2024

Svolgere 4 dei seguenti 5 esercizi :

1. Definizione di massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$. Teorema di Weierstrass sulla loro esistenza.

Data la funzione $f(x, y) = 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2}$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$.

2. Enunciare la prima e la seconda formula di Green-Gauss. Utilizzando la prima calcolare

$$\int_{+FD} \left(\frac{1}{2}x^2y + 2x\right) dy$$

dove $+FD$ è la frontiera di $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$ percorsa in verso antiorario.

3. Enunciare il teorema di Stokes ed illustrare i suoi simboli. Utilizzandolo calcolare

$$\int_{+\Sigma} \langle \text{rot}F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (2y, x^2, -3z^2)$ e Σ è la porzione della superficie $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$.

4. Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Considerare la forma differenziale

$$\omega = -\frac{2x}{4 - x^2 - y^2} dx - \frac{2y}{4 - x^2 - y^2} dy,$$

a) dimostrare che è chiusa,

b) trovare un insieme dove ω è esatta,

c) calcolare la funzione potenziale,

d) calcolare l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$, dove γ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

5. Definizione di serie di potenze e di intervallo di convergenza. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^3 + 1} x^n,$$

trovare l'intervallo di convergenza e stabilire se è chiuso. Trovare un intervallo dove la serie è integrabile termine a termine.

Esame di Analisi Matematica 2 - (150 minuti)

14 febbraio 2024

1. Si determinino i massimi e minimi relativi per la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.
2. Enunciare le formule di Green Gauss e dimostrarne una. Sia $f(x, y) = x^2y^3$ e $D = \{y \in [0, 1], x < \sqrt{2-y}\}$. Calcolare sia l'integrale doppio esteso a D sia il curvilineo esteso alla FD e dimostrare che coincidono.
3. Data la forma differenziale lineare $\omega = (y^2 e^{xy}) dx + (e^{xy} + xye^{xy}) dy$ si dica se è esatta nel suo campo di definizione. Si integri ω lungo la frontiera (orientata positivamente) del dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$
4. Svolgere a scelta uno dei seguenti esercizi.

a) Enunciare il teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare

$$\iint_{\Sigma} \langle \text{rot} F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (z, x - y, y)$, Σ è la porzione di paraboloido di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ con $1 \leq z \leq 4$.

b) Definizione di serie di potenze. Insieme di convergenza. Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-nx},$$

trovare il raggio e l'intervallo di convergenza, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Analisi Matematica 2

30 gennaio 2024

1. Enunciare il teorema di Stokes e utilizzandolo calcolare l'integrale $\int_{+B\Sigma} (F, T) ds$, dove $F = (1 - y, 1 - 2y, z^2)$ e Σ è la porzione di paraboloido di equazione $z = 2(x^2 + y^2)$ che si proietta nel cerchio $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x \leq 0$.
2. Definizione di massimo e minimo relativo per una funzione $f(x, y)$. Condizione necessaria e condizione sufficiente per l'esistenza dei massimi e minimi relativi. Data la funzione $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$, determinare i punti critici e classificarli.
3. Definizione di forma differenziale lineare chiusa e forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Dire se la forma differenziale $\omega = 2y^3 dx + 6y^2(x-1) dy$
 - a) è esatta nel suo campo di definizione,
 - b) se ω è esatta trovare una funzione potenziale,
 - c) calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è l'arco di curva $r(t) = (t, \sqrt{t})$, $t \in (0, 2)$.
4. (svolgere a piacere uno dei due esercizi)

a) Serie di potenze. Definizione di raggio di convergenza e intervallo di convergenza.

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} (x-3)^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo. Cosa si può dire sulla serie delle derivate?

b) Enunciare le formule di Green-Gauss. Utilizzandole calcolare $\int_{+\partial D} y^2 dx$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, y-2 \leq x \leq 2-y\}$

Analisi Matematica 2

16 gennaio 2024

1. Definizione di massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$. Teorema di Weierstrass sulla loro esistenza.

Data la funzione $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Definizione di forma differenziale chiusa e forma differenziale esatta in $D \subset \mathbb{R}^2$. Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Considerate la forma differenziale

$$\omega = (e^{xy} + xye^{xy})dx + x^2e^{xy}dy$$

- a) dimostrare che è chiusa ed esatta nel suo campo di definizione (scrivere bene le motivazioni),
 - b) calcolare una funzione potenziale,
 - c) calcolare l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$, dove $\gamma := \{y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$.
3. Studiare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} (1 + \ln x)^n$$

4. Svolgere solo uno dei seguenti esercizi

- a) Enunciare le formule di Gauss-Green e dimostrarne una. Utilizzandola calcolare il seguente integrale $\int_{+\partial D} x^3 y dy$ dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq x + 1, 1 \leq x \leq 4\}$

- b) enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare il seguente integrale $\int_{+B\Sigma} (F, T) ds$ dove $F = (z^2 - y^2, x - z^2, y^2 - x^2)$ e Σ è la porzione di piano $z = 3 - x - y$ che si proietta nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$.

Seconda prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2

20 dicembre 2023

1. Definizione di forma differenziale lineare chiusa e forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Dire se la forma differenziale $\omega = ye^{xy} \cos y dx + e^{xy}(x \cos y - \sin y) dy$ è esatta e calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la curva di equazioni parametriche $r(t) : (\sin t, t), 0 \leq t \leq \pi$. Scrivere la funzione potenziale.
2. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \frac{ds}{x}$ dove γ è la curva dello spazio definita da $\gamma := (t, 2 \ln t, \frac{2}{t}), 1 \leq t \leq 2$.
3. Enunciare le formule di Green-Gauss e dimostrarne una. Utilizzandola calcolare il seguente integrale $\int_{+\gamma} \ln(2-x) dy$ dove $+\gamma$ è la frontiera del dominio $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2-x \leq y \leq 4-x^2\}$

4. Svolgere a piacere uno dei due quesiti

a) Definizione di superficie regolare e regolare a tratti e integrale superficiale. Calcolare l'area della superficie del solido definito da $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

b) Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare $\int_{+B\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ dove $F = (z, x, y)$ e $+B\Sigma$ è il bordo della porzione di superficie di equazione $z = 2 - x^2 - y^2$ che si proietta nel triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 2)$.

Prima prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2 (A)

15 Novembre 2023

1. Definizione di funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0) e legami con la continuità e la derivabilità parziale. Dimostrare uno dei teoremi. Dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $O = (0, 0)$ la funzione così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y^4)}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Studiare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \left(\frac{x}{x-1} \right)^n$$

3. Definizione di massimo e minimo relativo per una funzione $f(x, y)$ e condizioni sufficienti per la loro esistenza. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = xye^{-(x+y)}$.

4. Dimostrare che $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ è armonica. Determinare il massimo e minimo assoluti di $f(x, y)$ nel triangolo di vertici $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ e $B(1, 0)$.

Prima prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2 (B)

15 Novembre 2023

1. Definizione di massimo e minimo assoluti, illustrare la loro ricerca in un dominio chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 . Determinare il massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{x^2+y^2}$ nel dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$.
2. Definizione di serie di potenze e intervallo di convergenza. Determinare il raggio di convergenza e l'intervallo di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n$$

3. Definizione di funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0) e suo significato geometrico.

Verificare che la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è differenziabile in $P = (0, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto P

4. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat per una funzione $f(x, y)$. Calcolare e classificare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 - x^2y^2 + y^2$

Analisi Matematica 2

11 luglio 2023

(svolgere 4 dei seguenti esercizi)

1. Ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y) = 2 - y^2 + e^{-x^2-y^2}$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.
2. Definizione di forma differenziale lineare esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Data la forma differenziale $\omega = (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy$
 - a) dire se è esatta nel suo campo di definizione,
 - b) trovare una funzione potenziale,
 - c) calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è l'ellisse di equazione $\left\{\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\right\}$.
3. Enunciare il teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare

$$\iint_{\Sigma} \langle \text{rot}F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (z, x - y, y)$, Σ è la porzione di superficie sferica di equazione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $1 \leq z \leq 2$.

4. Serie di potenze. Definizione di raggio di Convergenza.

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n+1)^2} (x+1)^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo.

5. Enunciare le formule di Green-Gauss e il Teorema della Divergenza. Utilizzando una formula calcolare $\iint_D 2xy \, dx dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

Analisi Mat. 2

19 settembre 2023

1. Condizioni sufficienti affinché una $f(x, y)$ abbia max e min relativi nel suo campo di definizione (con dimostrazione). Si trovino i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = 1 + x e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}.$$

2. Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare $\int_{+B\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds$, con $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, $\mathbf{F} = (1 - 2x, 1 - 3x, 2z^2)$.

3. Definizione di forma differenziale ω chiusa. Definizione di forma differenziale esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Condizioni sufficienti affinché ω sia esatta in D (con dimostrazione). Data la forma

$$\omega = (2x \sin^2 y) dx + 2x^2 (\sin y \cos y) dy,$$

dimostrare che la forma risulta esatta in \mathbb{R}^2 . Trovare la funzione potenziale. Utilizzandola calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è l'arco di curva $y = \frac{\pi}{2} x^2$ compresa tra i punti $O = (0, 0)$ e $A(1, \frac{\pi}{2})$.

4. (a scelta)

a) Enunciare le formule di Green-Gauss. Utilizzandone una calcolare $\iint_D \frac{y}{x} \, dx dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$.

b) Serie di potenze. Definizione di raggio di Convergenza. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo.

Analisi Matematica 2

11 luglio 2023

(svolgere 4 dei seguenti esercizi)

1. Ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y) = 2 - y^2 + e^{-x^2 - y^2}$ nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

2. Definizione di forma differenziale lineare esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Data la forma differenziale $\omega = (\sin y - y \sin x) dx + (x \cos y + \cos x) dy$

a) dire se è esatta nel suo campo di definizione,

b) trovare una funzione potenziale,

c) calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è l'ellisse di equazione $\{(x-2)^2/4 + (y-1)^2 = 1/4\}$.

3. Enunciare il teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (z, x - y, y)$, Σ è la porzione di superficie sferica di equazione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $1 \leq z \leq 2$.

4. Serie di potenze. Definizione di raggio di Convergenza.

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n+1)^2} (x+1)^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo.

5. Enunciare le formule di Green-Gauss e il Teorema della Divergenza. Utilizzando una formula calcolare $\iint_D 2xy \, dx dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.

Analisi Matematica 2

27 giugno 2023

(svolgere 4 dei seguenti esercizi)

1. Enunciare il teorema di Stokes.

Sia dato il campo $F = (z, y^2, xy)$ e sia Σ la porzione di paraboloide $\{z = 4 - x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcolare entrambi gli integrali che compaiono nel teorema e verificare che coincidono.

2. Ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$.

Data la funzione $f(x, y) = e^x \cos y$, dimostrare che è armonica ($f_{xx} + f_{yy} = 0$) e si determinino il massimo e il minimo assoluti nel quadrato di vertici $O(0, 0), A(1, 0), B(1, \pi/2), C(0, \pi/2)$.

3. Definizione di forma differenziale lineare chiusa e forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Trovare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la forma differenziale $\omega = (x^3 + y)dx + \frac{k}{2}x dy$

a) è esatta nel suo campo di definizione,

b) trovare una funzione potenziale,

c) calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel primo quadrante.

4. Serie di potenze. Definizione di raggio di Convergenza.

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} (x-2)^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo.

5. Enunciare le formule di Green Gauss e dimostrarne una. Sia $f(x, y) = \ln y$ e $D = \{x \in [0, 1], e^x \leq y \leq e\}$. Utilizzando la formula di Green Gauss opportuna, calcolare l'integrale $\int_{+FD} f(x, y) dx$.

Analisi Matematica 2

13 giugno 2023

Svolgere 4 dei seguenti 5 esercizi :

1. Definizione di massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$. Teorema di Weierstrass sulla loro esistenza.

Data la funzione $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

2. Enunciare la prima e la seconda formula di Green-Gauss. Utilizzandone una, calcolare

$$\iint_D (1 + xy) \, dx dy$$

dove D è il dominio del primo quadrante così definito: $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$.

3. Enunciare il teorema di Stokes ed illustrare i suoi simboli. Utilizzandolo calcolare $\int_{+B\Sigma} \langle F, t \rangle ds$, dove $F = (2y, x^2, -3z^2)$ e $B\Sigma$ è il bordo della superficie Σ definita come la porzione di piano $z = 1 - 2x - 2y$, $z \geq 0$, interna al cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$.

4. Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Proprietà delle forme esatte. Considerare la forma differenziale

$$\omega = -\frac{2x}{4 - x^2 - y^2} dx - \frac{2y}{4 - x^2 - y^2} dy,$$

a) dimostrare che è chiusa,

b) trovare un insieme dove ω è esatta,

c) calcolare l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$, dove γ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

5. Definizione di serie di potenze e di intervallo di convergenza.

Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} (x - 2)^n,$$

trovare l'intervallo di convergenza e stabilire se è chiuso.

Analisi Matematica 2

22 febbraio 2023

1. Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}^N$ converge puntualmente la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{3 + n} (x - 1)^n.$$

2. Determinare il minimo e il massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = xy \quad \text{nell'insieme } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

3. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\omega = -\frac{2x \sin(4y)}{4x^2 + 1} dx - \cos(4y) \ln(a^2 x^2 + 1) dy$$

è esatta nel suo dominio. Per uno di tali valori, trovare una funzione potenziale per ω . Infine, calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è una qualunque curva regolare avente come primo estremo il punto $A = (0, \frac{\pi}{2})$ e come secondo estremo il punto $B = (1, \frac{3}{8}\pi)$.

4. Svolgere a scelta solo uno dei due esercizi

a) Sia definito il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 - 3 \leq y \leq 3 - x\}.$$

Dopo aver rappresentato graficamente D e l'orientazione positiva ∂D , calcolare l'area del dominio utilizzando una delle formule di Gauss-Green.

b) Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (3y - x, z, xy)$ attraverso la porzione di piano $z = 2x + y + 1$ che si proietta nel triangolo di vertici $(0, 0)$; $(0, 1)$, $(1, 0)$.

Analisi Matematica 2 (B)

17 gennaio 2023

1. Enunciare il teorema di Stokes ed illustrare i suoi simboli. Utilizzandolo calcolare

$$\iint_{+\Sigma} \langle \operatorname{rot} F, n_e \rangle d\sigma,$$

dove $F = (z^2 - y^2, x - z^2, y^2 - x^2)$ e Σ e' la porzione di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, e interna al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

2. Definizione di forma differenziale lineare chiusa e forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale ω sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Considerare la forma differenziale $\omega = y(3x^2y^3 - 1)dx + x(4x^2y^3 - 1)dy$ nella corona circolare $C = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$,

a) dimostrare che è chiusa,

b) trovare un insieme dove ω è esatta e calcolare la funzione potenziale,

c) calcolare l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$, dove γ è la circonferenza $(x - 2)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

3. Definizione di massimo e minimo assoluto e relativo per una funzione $f(x, y)$.

Data la funzione $f(x, y) = y - x^2 - 2y^2$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel dominio $D = \{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

4. Definizione di serie di funzioni convergente puntualmente.

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1) e^{-2nx}$ dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge.

5. (a scelta, solo se sono stati risolti almeno 3 degli esercizi precedenti)

Enunciare le formule di Green-Gauss. Utilizzando la prima calcolare $\int_{+\partial D} (x^2y + x) dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Seconda prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2

21 dicembre 2021

1. Si calcoli la misura del volume del solido definito come

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

2. Enunciare le formule di Green-Gauss e dimostrarne una. Utilizzandola calcolare il seguente integrale $\iint_D 2xy dx dy$, dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq 1\}$
3. Definizione di forma differenziale lineare esatta. Condizione sufficiente affinché una forma differenziale sia esatta nello spazio. Data la forma differenziale lineare $\omega = (x + y)dx + (z + x)dy + (y + z)dz$ si dica se è esatta nel suo campo di definizione e in caso affermativo si trovi la funzione potenziale.
4. Definizione di superficie e integrale superficiale.
Calcolare l'area della porzione di superficie Σ di equazione $z = 1 - x - y$ che si proietta nel triangolo del piano XY di vertici $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.
5. **(facoltativo) Risolvere a scelta uno dei seguenti quesiti.**
 - a) Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo, calcolare il seguente integrale

$$\int_{+B\Sigma} z^2 dx + xyz dy + xz^2 dz$$

dove $B\Sigma$ è il bordo della porzione di piano $2z + 2x + y - 3 = 0$ che si proietta nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 1$.

b) Dimostrare che se $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ è chiusa in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso allora ω è anche esatta in D .

Prima prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2

17 Novembre 2021

1. Definizione di funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0) e legami con la continuità e la derivabilità parziale. Dimostrare uno dei teoremi. Dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $O = (0, 0)$ la funzione $f(x, y) = 1 - x + \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Definizione di massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$ e illustrare la loro ricerca. Si determinino il massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ nell'insieme $D = \{x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$.
3. Definizione di raggio di convergenza e intervallo di convergenza di una serie di potenze. Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{n^2} (x - 2)^n.$$

Studiare la serie anche agli estremi dell'intervallo trovato.

Prima prova parziale di ANALISI MATEMATICA 2

17 Novembre 2021

1. Enunciare il teorema di Weierstrass per le funzioni di due variabili. Verificarlo per la funzione $f(x, y) = y - x^2 - 2y^2$ nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ e trovare il massimo e minimo assoluti.
2. Definizione di serie di funzioni convergente puntualmente e totalmente. Studiare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 - \ln x)^n}{n^2}.$$

3. Definizione di funzione differenziabile in un punto (x_0, y_0) e suo significato geometrico.

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y)$ così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua, derivabile parzialmente, differenziabile in $(x, y) = (0, 0)$

Analisi matematica 2

20 gennaio 2021

1. Enunciare il teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare

$$\int_{+B\Sigma} \langle F, T \rangle ds,$$

dove $F = (z, x, y^2)$ e Σ è la porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$, $1 \leq z \leq 4$.

2. Definizione di forma differenziale lineare chiusa e forma differenziale esatta in \mathbb{R}^2 . Condizioni sufficienti affinché una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ sia esatta in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Dire se la forma differenziale $\omega = (x^2 + y)dx + xdy$
 - a) è esatta nel suo campo di definizione,
 - b) se ω è esatta trovare una funzione potenziale,
 - c) calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
3. Ricerca del massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$.
Data la funzione $f(x, y) = x^2 + 8y^2 + 2x^2y$, si determinino il massimo e il minimo assoluti nel triangolo di vertici $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.
4. (svolgere a piacere uno dei due esercizi)
 - a) Serie di potenze. Definizione di raggio di Convergenza. Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x - 2)^n$, trovare il raggio e l'intervallo di convergenza. Studiare inoltre la convergenza agli estremi dell'intervallo
 - b) Definizione di integrale curvilineo $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ e interpretazione geometrica. Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} xy^2 ds$, dove γ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 2 che congiunge i punti $(2, 0)$ e $(1, \sqrt{3})$.

Analisi Matematica 2

gennaio 2020

1. Condizioni sufficienti affinché una $f(x, y)$ abbia max e min relativi nel suo campo di definizione (con dimostrazione). Si trovino i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = y(1 - x^2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

2. Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo calcolare $\int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma$, con $\Sigma = \{x + y + 2z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, e

$$\mathbf{F} = (y + 1, -2z, -x).$$

3. Definizione di forma differenziale ω esatta in $D \subset \mathbb{R}^2$. Condizioni sufficienti affinché ω sia esatta in D . Data la forma

$$\omega = (2 \sin y) dx + k(1 + x \cos y) dy,$$

trovare il valore di k tale che la forma risulti esatta in \mathbb{R}^2 .

4. (facoltativo) Calcolare il volume del solido così definito

$$V = \{z \leq 2 - x^2 - y^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

dicembre 2019

1. Definizione di curva regolare nel piano e nello spazio. Definizione di integrale curvilineo $\int_{\gamma} f ds$ e suo significato geometrico. Calcolare la lunghezza della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos^3 t, \\ y(t) = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

2. Calcolare l'area della porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel dominio $D : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - x \leq 0\}$

3. Formule di Gauss-Green e teorema della divergenza. Enunciarle e dimostrarne una. Utilizzandole calcolare

$$\int_{\gamma} xy(2 - y) dx,$$

dove γ è la frontiera del dominio $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 0\}$

4. Definizione di forma differenziale chiusa e di forma differenziale esatta nel piano. Dimostrare che se $w = F_1 dx + F_2 dy$ è chiusa in un dominio semplicemente connesso allora è anche esatta. Dimostrare che la seguente forma differenziale $\omega = (\cos y - y^3 \sin x) dx + (3y^2 \cos x - x \sin y) dy$ è esatta nel suo campo di definizione e determinare la funzione potenziale.

Prima prova parziale di Analisi Mat. 2

novembre 2019

1. Differenziabilità

Definizione e teoremi fondamentali. Dimostrare che la differenziabilità implica la continuità. Fare un esempio di funzione differenziabile e di una non differenziabile in un punto.

2. Massimo e minimo assoluti.

Definizione e condizioni sufficienti per la loro esistenza. Data la funzione $f(x, y) = 2\log(x^2 + y^2)$, dimostrare che è armonica ($f_{xx} + f_{yy} = 0$) e calcolare il massimo e minimo assoluti nel dominio $D = \{y \leq \sqrt{1-x^2}; y \geq 1-x\}$.

3. **Serie.** Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$, trovare per quali valori di x converge (trovare la somma) e per quali diverge.

Analisi matematica 2

settembre 2019

1. Definizione di massimo e minimo assoluto per una funzione $f(x, y)$ definita in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Determinare i minimi e massimi assoluti della funzione $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, nella corona circolare $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

2. Enunciare il Teorema di Stokes.

Utilizzandolo calcolare $\int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n \, d\sigma$, con

$\Sigma = \{x + y + 2z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, e

$$\mathbf{F} = (y + 1, -2z, -x).$$

3. Data la forma differenziale lineare

$$\omega = (2xy \cos y)dx + k x^2 (\cos y - y \sin y)dy,$$

trovare il valore di k tale che la forma risulti chiusa in $D = \{|x| \leq \pi; |y| \leq \pi\}$. Verificare inoltre che la forma è esatta in D e calcolare la funzione potenziale.

4. Definizione di superficie in \mathbb{R}^3 e superficie regolare. Verificare che la porzione di superficie

$$\Sigma = \{z = 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1/2\}$$

è regolare e calcolarne l'area.

Analisi Matematica 2

luglio 2019

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + 4$. Si trovino i massimi e minimi assoluti nel dominio $D = \{\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$.
2. . Enunciare il Teorema di Stokes. Utilizzandolo, calcolare

$$\int_{+B\Sigma} \langle F, t \rangle ds,$$

dove $F(x, y, z) = (y, z, -x)$ e

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 5y, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(si trasformi l'integrale curvilineo in integrale superficiale).

3. Definizione di forma differenziale $\omega(x, y)$ e di forma esatta definita in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$; condizioni sufficienti affinché $\omega(x, y)$ risulti esatta. Sia

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

- (a) Si provi che ω non è esatta nel suo insieme di definizione.
 - (b) Si trovi una restrizione dell'insieme di definizione della forma ω , dove risulti esatta.
4. Enunciare le Formule di Gauss-Green, e se ne dimostri una. Applicazione delle Formule di Gauss-Green al calcolo dell'area di un dominio piano. Calcolare l'area del dominio così definito

$$D = \{y \leq 0, y \geq -x, y \geq 2(x - 1)\}.$$

Analisi Matematica 2

1. Definizione di funzione differenziabile in un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e legami con la continuità e la derivabilità parziale della funzione nel punto. Determinare per quale valore di α è continua in $(0, 0)$ la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (1)$$

Dire inoltre se per tale valore la funzione è anche derivabile parzialmente e differenziabile in $(0, 0)$.

2. Definizione di massimo e minimo assoluti per una funzione $f(x, y)$. Determinare il massimo e minimo assoluti per la funzione $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$ nel triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.
3. Studiare la convergenza della seguente serie di potenze: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 3^n}$

4. Calcolare

$$\iint_D (2x + 1)y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq \sqrt{x}\}$.

Analisi Matematica 2 (secondo parziale)
dicembre 2018

1. Definizione di forma differenziale chiusa e di forma differenziale esatta. Condizione necessaria e condizione sufficiente affinché una forma differenziale sia esatta.

Data la forma differenziale $\omega = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(ydx - xdy)$:

- a) dimostrare che é esatta nell'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$
b) trovare una funzione potenziale.
2. Enunciare le formule di Green-Gauss e dimostrarne una a piacere. Applicandone una calcolare

$$\iint_D xy \, dx dy, \quad D := \{0 \leq x \leq 3; \ y \leq x + 1; \ y \geq (x - 1)^2\}$$

3. Si enunci il Teorema di Stokes e lo si utilizzi per calcolare $\int_{+B\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$, $B\Sigma$ il bordo di $\Sigma = \{5x + 2y + z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ con

$$\mathbf{F} = (-y^3, \ x^3, \ -z^3).$$

4. Calcolare L'area della porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$