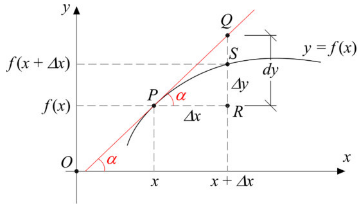
Calcolo differenziale per funzioni di una variabile



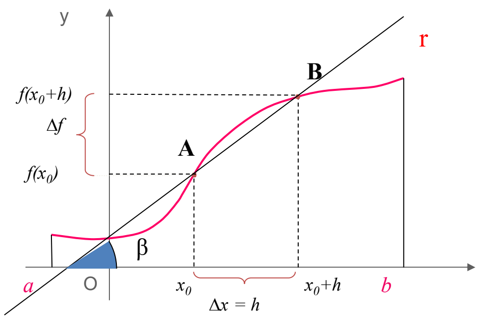
Derivata di una funzione

Rapporto incrementale e significato geometrico

Sia $x_0 \in (a, b)$: $x_0 + h \in (a, b)$

Si definisce Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = tg\beta$$



Derivata di una funzione

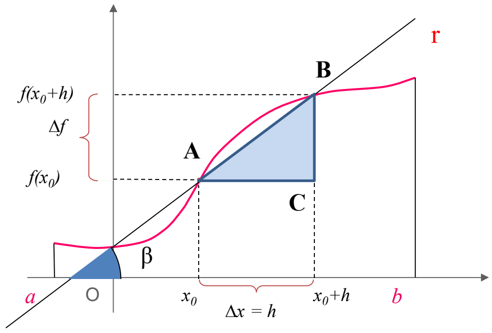
Rapporto incrementale e significato geometrico

Sia β l'angolo che la retta r forma con l'asse delle x, considerando il triangolo ABC possiamo scrivere

$$f(x+h) - f(x_0) = tg(\beta)[x_0 + h - x_0)]$$

Ossia:

$$tg(\beta) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata di una funzione

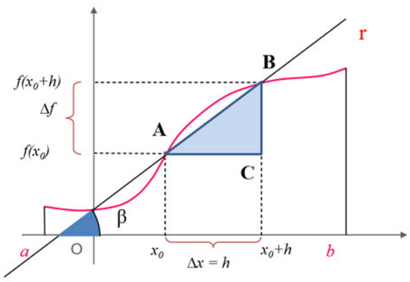
Rapporto incrementale e significato geometrico

Ma $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

È il coefficiente angolare della retta r passante per AB

Per cui

$$tg(\beta) = m$$



Ossia tgβ è il coeff. Angolare della retta secante per AB

Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

Def. *Sia f: (a,b)→R, si definisce derivata di f nel punto $x_0 \in (a,b)$ il numero, se ∃ finito,:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\ Df(x_0),\ \ Dy(x_0)$$

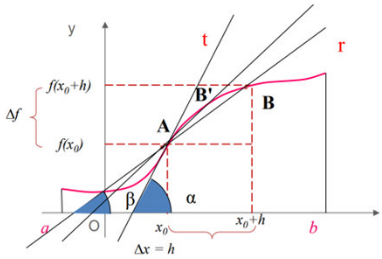
Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

Quando $h \to 0$ il punto B si sposta sulla curva avvicinandosi ad A, la retta r diventa tangente alla curva in A e si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = tg\,\alpha$$

coeff. angolare di t



Derivata di una funzione

Derivata e significato geometrico

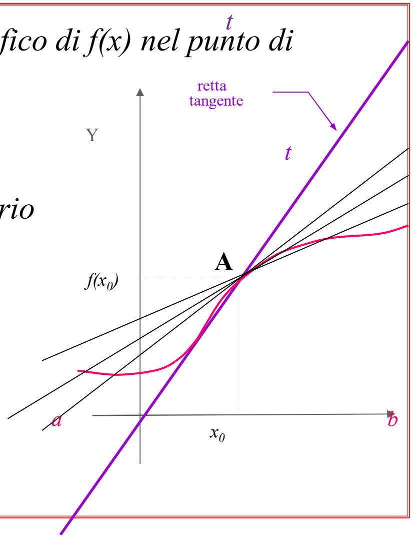
Equazione della retta tangente al grafico di f(x) nel punto di ascissa x_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Infatti tra tutte le rette del fascio proprio passanti per $A(x_0, f(x_0))$ di eq.

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

per $m = f'(x_0)$
si ottiene l'equazione di t



Derivata di una funzione

Se $f'(x)$ *è definita* $\forall x \in (a,b)$ *allora f(x) è derivabile in* (a,b) *e risulta definita la funzione* $f' : (a,b) \to R$ *detta derivata prima di f(x)*

f(x) è derivabile in $[a,b]$, *se è derivabile* $\forall x \in (a,b)$ *e ammette derivata destra in* $x = a$ $\left(si\ scrive\ f'_+(a)\right)$
e derivata sinistra in $x = b$ $\left(si\ scrive\ f'_-(b)\right)$

Derivata di una funzione

Definizione

Derivata destra $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

Derivata sinistra $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

Se $f'_+(x) = f'_-(x)$ *f è derivabile in x*

Derivata di una funzione

Continuità e derivabilità

Teorema.

Sia f: (a,b)→R. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora f è continua in x_0.

Dimostrazione

Sia $h \neq 0$ *e* $x_0, x_0 + h \in (a,b)$:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h = 0$$

Da cui $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Che è la continuità di f in x_0

Derivata di una funzione

Continuità e derivabilità

Quindi
derivabilità ⇒ *continuità*

Non è vero il viceversa

Es. y=|x| è continua ma non è derivabile in x=0.

Infatti

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \qquad e \qquad y'=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$f'_+(0)=1\neq f'_-(0)=-1$$

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

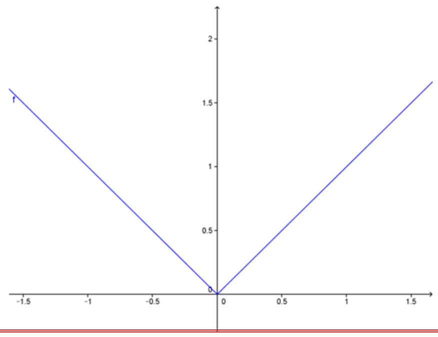
Se $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$ *e almeno una* ∃ *finita*

x_0 *si dice* ***punto angoloso****, in quanto le rette tangenti alla f(x) nel punto di ascissa* x_0 *formano un angolo.*

Es.

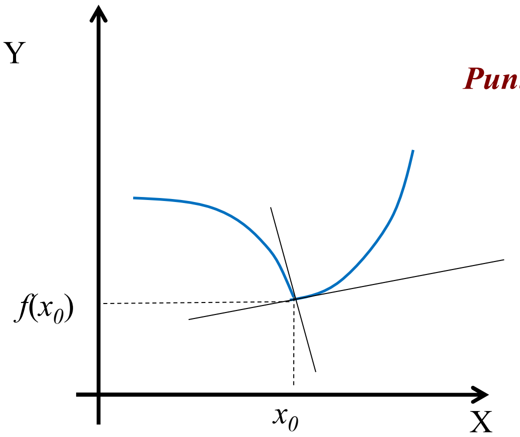
f(x)= |x|

$$f'_+(0)=1\neq f'_-(0)=-1$$



Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

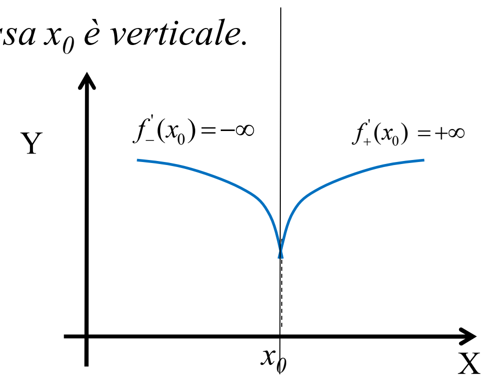


Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Se $f_+^{'}(x_0) \neq f_-^{'}(x_0)$ *sono ∞*

x_0 *si dice* ***punto cuspide***; *la retta tangente alla f(x) nel punto di ascissa* x_0 *è verticale.*

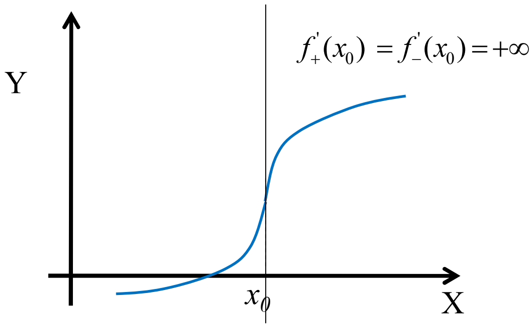


Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Se $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) = \pm\infty$ *sono* ∞

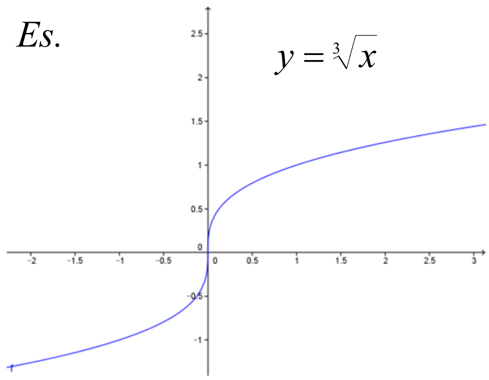
x_0 *si dice* ***punto di flesso a tangente verticale****; la retta tangente alla f(x) nel punto di ascissa* x_0 *è verticale.*



Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Es.

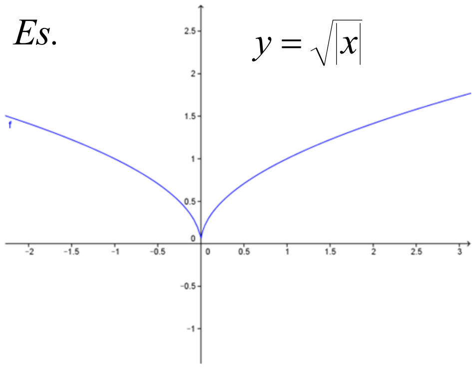


$$f'_{+}(0) = f'_{-}(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Punti di non derivabilità

Es.



$$f'_-(0) = -\infty$$
$$f'_+(0) = +\infty$$

Derivata di una funzione

Derivata delle funzioni elementari

$$D(x^n) = n \cdot x^{n-1} \qquad D(k) = 0$$

$$D(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e \qquad D(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$D(a^x) = a^x \ln a \qquad D(e^x) = e^x$$

$$D(\sin x) = \cos x \qquad D(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

Derivata di una funzione

Derivata delle inverse delle funzioni trigonometriche

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivata di una funzione

Esercizio

Utilizzando la definizione calcolare la derivata di

1) $f(x)=k.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0$$

2) $f(x)=e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$$

Derivata di una funzione

3) $f(x)=lnx.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{1}{x}$$

Derivata di una funzione

4) $f(x)=cosx$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h} +$$

$$-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h} = -\sin x$$

Derivata di una funzione

5) f(x)=sinx

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}=\cos x$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Se f e g sono derivabili in x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (con il denominatore $\neq 0$) e si ha:

a) $(f\pm g)'=f'\pm g'$

b) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2},\quad g\neq 0$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \pm f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Per ipotesi f e g sono derivabili, quindi continue in x, perciò:

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x),$$

$$(f \cdot g)' = \ldots = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)\cdot h} =$$

$$= \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)\pm f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)\cdot h}$$

Aggiungo e tolgo $f(x)g(x)$

$$= \frac{[(f(x+h)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{g(x+h)g(x)\cdot h}$$

Derivata di una funzione

Algebra delle derivate

Dimostriamo la c)

$f'(x)$ $g'(x)$

$$= \frac{\frac{[(f(x+h)-f(x)]}{h}g(x)-f(x)\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

In *quanto per l'ipotesi di continuità di* $g(x)$ *di ha che* $g(x+h)=g(x)$

Derivata di una funzione

Esercizio.

1) Calcolare la derivata di $f(x) = \sin x \ln x$

$$f'(x) = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

2)Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di eq

$f(x) = 2e^{x}\sqrt[3]{x}$ *nel punto di ascissa x=1*

$$f'(x) = 2e^{x}\sqrt[3]{x} + 2\frac{e^{x}}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Sia g(x) una funzione derivabile in x, e se f(x) è una funzione derivabile nel punto g(x), allora la funzione composta f(g(x)) è derivabile in x, e si ha:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione composta

Dimostrazione. *Se* $h \neq 0$ *si ha*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

in quanto se $h \to 0$ *allora* $k \to 0$
con $k = g(x+h) - g(x)$, *essendo* $g(x)$ *continua in x.*
Se h=0, il teorema continua a valere.

Derivata di una funzione

Esercizio.

1) *Calcolare la derivata di* $f(x) = \ln(\sin x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$$

2) *Calcolare la derivata di* $f(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}}$.

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x^3+x}} \frac{6x^2 + 1}{2\sqrt{2x^3 + x}}$$

Derivata di una funzione

Esercizio.

3)Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(\ln x)$.

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Derivata di una funzione

Esercizio.

Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $f(x) = (xe^{2x} - 1)^3$ *nel punto di ascissa x=0*

Eq. retta tang. a $f(x)$ *in* $x = x_0$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Per noi $x_0=0$

$$f'(x) = 3(xe^{2x} - 1)^2(e^{2x} + 2xe^{2x}) \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$f(0) = -1$$

Quindi l'equazione è: $y = 3x - 1$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

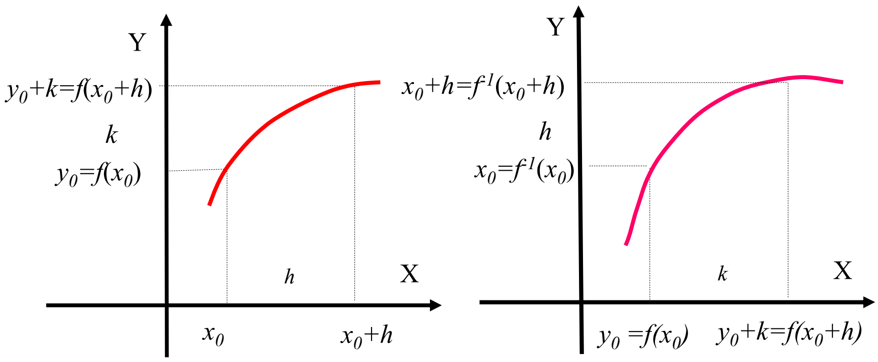
Sia $f(x)$ una funzione continua e strettamente monotona in $[a,b]$. Se f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e se $f(x) \neq 0$, allora anche la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y_0=f(x_0)$, e la derivata vale:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Dimostrazione. Si ha



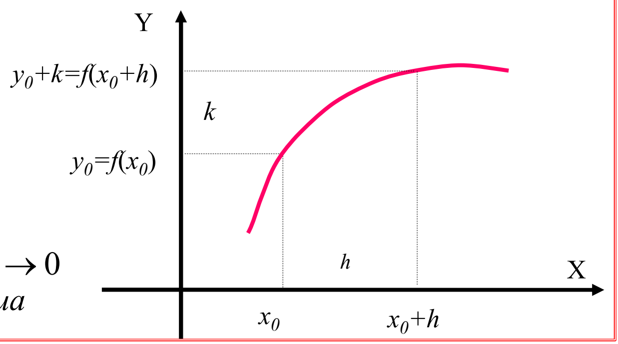
Se $k \to 0$ *anche* $h \to 0$
in quanto f^{1} è continua

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Si ha

$$\frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k}=\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}\xrightarrow[h\to 0]{}\frac{1}{f'(x_0)}$$



Se $k \to 0$ *anche* $h \to 0$
in quanto f^{-1} *è continua*

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Esercizio. Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che:

$$D[arcsin(y)]=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

x=arcsen(y) è la funzione inversa di y=sen(x)

quest'ultima è invertibile per $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Applichiamo il teorema della funzione inversa,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\boxed{[arcsen(y)]' = \frac{1}{[sen(x)]'} = \frac{1}{\cos(x)}}$$

Ma sappiamo che: $cosx = \sqrt{1 - sen^2 x}$

$$\boxed{[arcsen(y)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Es. Calcolare la derivata della funzione $y = e^x$,

vista come funzione inversa di $f(x) = \ln x$.

Per $x > 0$, *si ha* $x = f^{-1}(y) = e^y$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (e^y)' = x = e^y$

Quindi $(e^x)' = e^x$

Derivata di una funzione

Teorema di derivazione della funzione inversa

Es. Utilizzando il teorema di derivazione della funzione inversa, dimostrare che $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sia $f(x) = tgx$, *in* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *si ha* $x = f^{-1}(y) = arctgy$

$f(x) = tgx \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2 x$

Perciò, per il teorema della derivata della funzione inversa si ha

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (arctgy)' = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$