Analisi Matematica 2

Derivabilità parziale per funzioni di due variabili

Definizione di derivata parziale prima

Sia D un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f(x, y)$ definita in D. Consideriamo il punto $(x_0, y_0) \in D$ e un suo intorno $B_\delta(x_0, y_0) \subset D$. Consideriamo il punto $(x_0 + h, y_0) \in D, \ \ h \in \mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Definizione di Derivata parziale rispetto a x.

Se esiste finito il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0),$$

definiamo la funzione derivabile rispetto a x in (x_0, y_0).

Una funzione é derivabile rispetto a x in D se é derivabile rispetto a x in tutti i punti di D.

Definizione di derivata parziale prima

Consideriamo ora il punto $(x_0, y_0 + k) \in D$, $k \in \mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Definizione di Derivata parziale rispetto a y.

Se esiste finito il

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f_y(x_0, y_0),$$

definiamo la funzione derivabile rispetto a y in (x_0, y_0).

Si usano anche i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Si estendono le regole di derivazione sia per le operazioni che per le funzioni elementari e composte.

Esercizio

Calcolare $f_x(4,1)$ con $f(x,y) = log(x - y^2)$

$$f_x(4,1) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(3+h) - ln3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln(1+\frac{h}{3})}{h} = \frac{1}{3}$$

(si é utilizzato il limite notevole: $\lim_{t \to 0} \frac{ln(1+t)}{t} = 1$, $(\star)$)

Oppure:

$$f_x(4,1) = \lim_{x \to 4} \frac{ln(x-1) - log(3)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{3} \; \frac{ln\frac{x-1}{3}}{\frac{x-4}{3}} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{3} \; \frac{ln(1+\frac{x-4}{3})}{\frac{x-4}{3}} = \frac{1}{3},$$

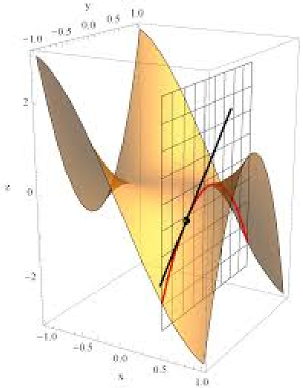
dove e' stato utilizzato il limite notevole $(\star)$

Significato geometrico della derivata parziale prima

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che giace sul piano $y = y_0$,

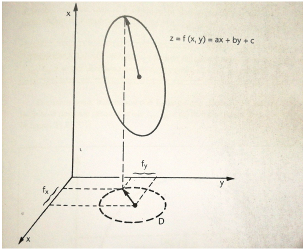
analogamente

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ che giace sul piano $x = x_0$



Indichiamo con $\nabla f = (f_x, f_y)$, che chiamiamo gradiente di f, il vettore di componenti le derivate parziali prime (rispetto alle direzioni degli assi x e y).

Si dimostra
che se non é nullo, il vettore gradiente $\nabla f = (f_x, f_y)$, (con f differenziabile) indica la direzione di massima pendenza di f.



Esempio

Si consideri la funzione:

$$f(x, y) = x + 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

si ha:

$$f_x = 1, \quad f_y = 2, \quad \textit{costanti su } \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f = (1, 2),$$

ed esprime la direzione e il verso nel piano di base x,y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a paritá di percorso nel piano x, y).

Esercizi

Calcolare le derivate parziali prime delle funzioni:

1) $f(x, y) = x^3y^2 + x^2 + y^2$,

2) $g(x, y) = \sin(x^2y)$.

Svolgimento

1) $f_x = 3x^2y^2 + 2x, \quad f_y = 2x^3y + 2y,$

2) $g_x = 2xy\cos(x^2y), \quad g_y = x^2cos(x^2y).$

La derivabilitá di una funzione $f(x, y)$ in un punto, non implica la continuitá di f in tale punto.

Esempio

Verificare che $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0, 0) = 0$

a)non é continua in $(0, 0)$,

b) é derivabile in $(0, 0)$.

Si ha

$$a): \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} = \cos\theta \sin\theta = \nexists \, (\textit{dipende da } \theta)$$

$$b): \qquad f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

analogamente si ottiene $f_y(0, 0) = 0$.

f é derivabile in $(0, 0)$con $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, ma non é continua in tale punto.

si poteva ottenere lo stesso risultato osservando che $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$ cioé f é costante lungo gli assi coordinati, si ha allora $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Esercizi

Stabilire se le funzioni ammettono derivate parziali nei punti $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$

1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,
2) $g(x,y)=|xy|$,
3) $u(x,y)=|x-y|(x+y)$.

Svolgimento

Si ha

1) $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\nexists, \qquad f_y(0,0)=\nexists$

$$f_x(0,1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h}=0$$

$$f_y(0,1)=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{(k+1)^2}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|1+k|-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{k}=1$$

$f_x(1,0)=1, \quad f_y(1,0)=0.$

$$f_x(1,1)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(1+h)^2+1}-\sqrt{2}}{h}=\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $g_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0, \quad g_y(0,0) = 0$

$g_x(0,1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \nexists, \quad g_y(0,1) = \lim_{k\to 0} \dfrac{0}{k} = 0$

$g_x(1,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \nexists, \quad g_y(1,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{|k|}{k} = \nexists$

$g_x(1,1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{|1+h|-1}{h} = 1, \quad g_y(1,1) = 1$

3) $u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|h}{h} = 0, \quad u_y(0,0) = 0$

$u_x(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{|h-1|(h+1)-1}{h} = 0, \quad u_y(0,1) = 0$

$u_x(1,0) = 2, \quad u_y(1,0) = 0$

$u_x(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|(2+h)}{h} = \nexists, \quad u_y(1,1) = \nexists$

Definizione di derivata parziale seconda

Sia D un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ definita in D e ivi dotata di derivate parziale prime $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$. Se a loro volta le funzioni f_x, f_y ammettono derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y,$$

allora definiamo la funzione f derivabile due volte rispetto a x o rispetto a y in (x_0, y_0) e indicheremo (tralasciando l'indicazione del punto) con i simboli brevi

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}$$

oppure con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

In particolare f_{xy}, f_{yx} sono dette derivate seconde miste, mentre f_{xx}, f_{yy} derivate seconde pure.

Esempio

Calcolare le derivate parziali seconde delle funzioni

1) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, in $\mathbb{R}^2$

2) $g(x,y) = x^y$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Svolgimento

1) $f_x = -2x\sin(x^2+y^2), \quad f_y = -2y\sin(x^2+y^2)$, perció

$$f_{xx} = -2\sin(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2), \quad f_{xy} = -4xy\cos(x^2+y^2),$$

$$f_{yy} = -2\sin(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2), \quad f_{yx} = -4xy\sin(x^2+y^2).$$

2) $g_x = yx^{y-1}, \quad g_y = x^y lnx$, perció

$$g_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad g_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}lnx,$$

$$g_{yy} = x^y ln^2 x, \quad g_{yx} = yx^{y-1}lnx + x^{y-1}$$

Teorema di Schwarz

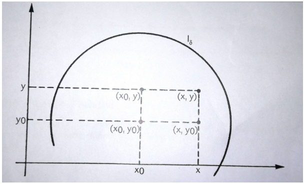
Teorema di Schwarz Sia $f(x, y)$ definita nell'aperto D e $(x_0, y_0) \in D$. Se esistono continue in (x_0, y_0) le derivate seconde miste di f, allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dimostrazione

Sia (x, y) il generico punto di D con $x \neq x_0,\ y \neq y_0$ e siano $(x, y_0), (x_0, y)$ gli altri due punti che con (x_0, y_0) formano un rettangolo dentro D. Introduciamo le due funzioni:

$$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0), \text{ fissato } y$$

$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y), \text{ fissato } x.$$



Dimostrazione del Teorema di Schwarz

Applichiamo ad $F(x)$ e $G(y)$ il Teorema di Lagrange per funzioni di una variabile.

In particolare per la F, nell'intervallo (x_0, x) esisterá un punto x_1 tale che

$$(1) \quad F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0) = [f_x(x_1, y) \ - f_x(x_1, y_0)](x - x_0).$$

Per la G, nell'intervallo (y_0, y) esisterá un punto y_1 tale che

$$(2) \quad G(y) - G(y_0) = G'(y_1)(y - y_0) = [f_y(x, y_1) \ - f_y(x_0, y_1)](y - y_0).$$

Riapplichiamo ora il Teorema di Lagrange nelle relazioni ottenute (alla f_x nella relazione (1); alla f_y nella relazione (2))

Nella (1) si ha che esiste un $y_2 \in (y_0, y)$ tale che

$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_2)\ (x - x_0)\ (y - y_0)$.

Analogamente nella (2) si ha che esiste un $x_2 \in (x, x_0)$:

$G(y) - G(y_0) = f_{yx}(x_2, y_1)\ (x - x_0)\ (y - y_0)$.

Da un calcolo diretto si ottiene

$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$
e quindi $f_{xy}(x_1, y_2) = f_{yx}(x_2, y_1)$.

Tenuto conto della continuitá delle derivate seconde miste, se facciamo tendere $(x, y) \to (x_0, y_0)$ si ha $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

NOTA: Essendo $x_0 < x_1,\ x_2 \ < x,\ \ y_0 < y_1,\ y_2 < y$, al tendere di (x, y) a (x_0, x_0), anche (x_1, y_2) e (x_2, y_1) tendono a (x_0, y_0).

Derivate parziali successive

Consideriamo la funzione $f_{xx}(x, y)$, e sia D' il suo dominio.

Se essa risulta derivabile rispetto a x o rispetto a y in (x_0, y_0), diremo che la f ammette derivate terze $f_{xxx}(x_0, y_0)$ e $f_{xxy}(x_0, y_0)$.

Analogamente a partire dalle altre derivate seconde, si definiscono le derivate parziali terze (es. $f_{yyx},\ f_{yyy},\ etc$).