# Analisi Matematica 2

Differenziabilità per funzioni di due variabili

# Differenziabilitá

Data la funzione $f(x, y)$ definita in $D$ ($D$ aperto di $\mathbb{R}^2$) e $P_0 = (x_0, y_0)$ un suo punto di accumulazione interno, sia $B_\delta(P_0)$ un intorno di $(x_0, y_0)$ contenuto in $D$. Sia inoltre, $P = (x, y)$ un generico punto di $B_\delta(P_0)$ e consideriamo $x = x_0 + h,\ y = y_0 + k \ \in B_\delta(P_0)$.

## Definizione di funzione differenziabile.

f si definisce differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$ se esistono le derivate parziali $f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0)$ tali che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\ h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

dove $f_x(x_0, y_0)\ h + f_y(x_0, y_0)\ k$ é chiamata il differenziale di $f$ (parte lineare) e si indica con $df(x_0, y_0)$.

Utilizzando il simbolo di "*o piccolo*" si puó dire che $f(x,y)$ é differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in D$ se é derivabile in $(x_0, y_0)$ e se

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\ h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

dove $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ e' un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2 + k^2}$.

La definizione si puo' riscrivere

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\ (x - x_0) - f_y(x_0, y_0)\ (y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

e con il simbolo di *o piccolo*:

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) =$$
$$f_x(x_0, y_0)\ (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\ (y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

# Significato geometrico della differenziabilitá

Geometricamente la differenziabilitá della $f$ in un punto é legata all'esistenza del piano tangente alla $f$ in quel punto.

Infatti se $f$ é differenziabile in $(x_0, y_0)$ allora

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\ (x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\ (y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}).$$

dove la funzione lineare

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\ (x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\ (y-y_0)$$

rappresenta l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $(x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = f(x_0, y_0)$.

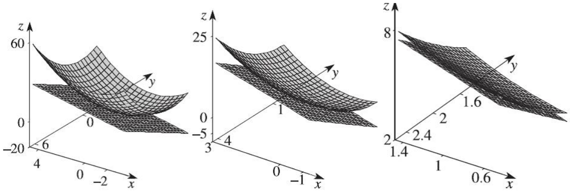


Figure: Tre ingrandimenti del grafico della funzione $z = x^2 + y^2$ e del suo piano tangente $z = 2x + 4y - 5$ intorno al punto $(1, 2, 5)$

All'aumentare dei fattori di ingrandimento, i grafici della funzione $f$ e del suo piano tangente in $P_0$ diventano indistinguibili (l'errore o "distanza" di $f$ dal piano tangente, tende a zero piú rapidamente dell'incremento $errore = o(\sqrt{h^2 + k^2})$)

L'espressione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\ (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\ (y - y_0)$$

rappresenta quindi una approssimazione della funzione $f(x, y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0)$ a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo ( $o(\sqrt{h^2 + k^2})$)

## Esercizi

Data la funzione $f(x,y)=\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)\ \ f(0,0)=0$, dire se nel punto $(0,0)$ é

a) continua,

b) derivabile parzialmente,

c) differenziabile.

In caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente.

## Svolgimento

Si ha:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos xy}{x^2y^2}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

quindi $f$ é continua in $(0,0)$

b) $$f_x=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0,\qquad f_y=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1-\cos hk}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

l'equazione del piano tangente é $z=0$

## Esercizi

Data la funzione $f(x, y) = \arctan(x + 2y)$, dire se nel punto $(0, 0)$ é
a) continua,
b) derivabile parzialmente,
c) differenziabile.
In caso affermativo scrivere l'equazione del piano tangente.

## Svolgimento

Si ha:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan(x + 2y) = 0 = f(0, 0)$ quindi $f$ é continua in $(0, 0)$

b) $f_x = \frac{1}{1+(x+2y)^2}\big|_{(0,0)} = 1$, e $f_y = \frac{2}{1+(x+2y)^2}\big|_{(0,0)} = 2$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(h + 2k) - h - 2k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

l'equazione del piano tangente é $z = x + 2y$

# Legami tra differenziabilitá, continuitá e derivabilitá parziale.

*Differenziabilitá* $\Rightarrow$ *Continuitá*

**Teorema 1**

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto $P_0$, allora é ivi continua.

Dimostrazione

Essendo $f$ differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$, si puó scrivere

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A\ h + B\ k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

con $A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0)$

Calcoliamo il limite per $(h, k) \to (0, 0)$: gli addendi a destra convergono a zero, quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0, \quad (\textit{continuitá in } P_0).$$

# Condizioni sufficienti per la differenziabilitá.

**Teorema**

Sia $f$ derivabile in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se le derivate parziali $f_x, \; f_y$ sono continue in un punto $P = (x, y) \in D$ allora $f$ é differenziabile in $P$.

In particolare

$$f \in C^1 \Rightarrow f \quad \textit{differenziabile}.$$

Esempio.
Dimostrare che $f(x,y) = x^2 + y^2$ e' differenziabile in $P = (1,1)$
La funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , allora e' differenziabile.
Dimostriamolo anche con la definizione.
$f(1,1) = 2;\ f_x(1,1) = 2,\ f_y(1,1) = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x,y) - f(1,1) - 2(x-1) - 2(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} = 0$$

(essendo l'infinitesimo a numeratore di ordine superiore rispetto al denominatore).

# Funzioni composte e loro derivate

Siano $(x(t), y(t))$ due funzioni reali continue su un intervallo $I$ di $\mathbb{R}$.

Al variare di $t \in I$, la coppia $(x, y)$ descrive una curva $\gamma$ nel piano.

Esempio

Le funzioni

$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \qquad t \in I = [0, \pi]$

rappresentano i punti della semi-circonferenza di equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Le funzioni

$x(t) = t - 1, \quad y(t) = t + 1, \qquad t \in I = [0, 1]$

rappresentano i punti del segmento di estremi $P = (-1, 1)$ e $Q = (0, 2)$ che sta sulla retta di equazione $y = x + 2$

# Funzione composta

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in $D$ e $\gamma \subset D$.
Definiamo funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \quad \forall t \in I.$$

Geometricamente la funzione composta rappresenta la curva intersezione con la superficie $\Sigma$ di equazione $z = f(x, y)$ con la superficie cilindrica $\Sigma'$ di equazione $(x = x(t), y = y(t))$

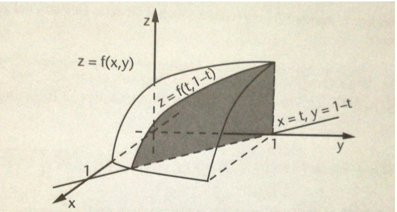


Figure: $F(t) = f(x(t), y(t)), \quad x(t) = t, y(t) = 1 - t$

## Teorema della derivata della funzione composta.

Supponiamo che le funzioni $(x(t), y(t))$ siano derivabili in un punto $t \in I$ e che la $f(x, y)$ sia differenziabile nel corrispondente punto $(x(t), y(t)) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora $F(t) = f(x(t), y(t))$ risulterá derivabile in $t$ e si ha

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\; x'(t) + f_y(x(t), y(t))\; y'(t).$$

La derivata della funzione composta $F(t)$ fornisce una misura della pendenza del cammino scelto sulla superficie $z = f(x, y)$.

## Esempi

1) $z = ln(x^2 - y^2)$, con $x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) =$$

$$\frac{2\cos(t)}{\cos^2(t) - \sin^2(t)}(-\sin t) - \frac{2\sin t}{\cos^2 t - \sin^2 t}(\cos t) =$$

$$-2\frac{\sin 2t}{\cos 2t}$$

2) $z = x^2 + y^2$, composta con $x(t) = 1 + t, \quad y(t) = 1 - t$

$F(t) = (1 + t)^2 + (1 - t)^2$,
$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t), y(t)) = f_x x' + f_y y' = F'(t) = 2(1 + t) - 2(1 - t) = 4t$

# Dimostrazione

Per ipotesi $f(x, y)$ é differenziabile in $(x(t), y(t))$:

$$f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t), y(t)) + f_x(x(t), y(t))\,[x(t+h) - x(t)]$$

$$+f_y(x(t), y(t))\,[y(t+h) - y(t)] + o(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2})$$

Dividiamo per $h$ e facciamo il limite per $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} f_x(x(t), y(t)) \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + f_y(x(t), y(t)) \frac{y(t+h) - y(t)}{h} +$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2})}{h} =$$

$$f_x(x(t), y(y))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Si é ottenuta la tesi, utilizzando le ipotesi di differenziabilitá di $f$ e di derivabilita' delle $(x(t), y(t))$.

NOTA:

l'ultimo pezzo dell'uguaglianza, ha limite zero in quanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2})}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2})}{\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}} \cdot \frac{\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2})}{\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}} \cdot \sqrt{\left[\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right]^2 + \left[\frac{[y(t+h)-y(t)}{h}\right]^2} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2})}{\sqrt{[x(t+h)-x(t)]^2+[y(t+h)-y(t)]^2}} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2} = 0$$

# Derivata direzionale

sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, ed $f(x,y)$ una funzione definita su $A$. Fissiamo una direzione in $\mathbb{R}^2$ cioè fissiamo un vettore $v = (\alpha, \beta)$ (vettore di modulo $|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$)

**Definizione**

Si definisce derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto di coordinate $(x,y)$ e nella direzione $v = (\alpha, \beta)$ il limite se esiste finito:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x,y)}{t} = D_v f(x,y),$$

Altri modi di indicare la derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x,y), \quad D_v f.$$

## Derivata direzionale di una funzione differenziabile

Sia $f(x,y)$ definita in $D$ aperto di $\mathbb{R}^2$ e differenziabile in un punto $(x,y) \in D$. Allora $f$ ammette derivata direzionale rispetto ad ogni direzione $v = (\alpha, \beta)$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = f_x(x,y)\alpha + f_y(x,y)\beta.,$$

Esercizio

Calcolare la derivata direzionale di

$f(x, y) = x^2 + y^2$ in $(x, y) = (1, 1)$ rispetto alla direzione $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Si ha $D_v f(1, 1) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t) - f(1, 1)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 - 2}{t} = 2\sqrt{2}.$$

Oppure utilizzando la regola di calcolo della derivata direzionale per una funzione differenziabile, si ha

$D_v f(1, 1) = f_x(x, y)\alpha + f_y(x, y)\beta = f_x(1, 1)\frac{\sqrt{2}}{2} + f_y(1, 1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

# Il differenziale secondo.

Sia $f$ di classe $C^2(D)$, $f$ allora ammette derivate parziali prime $f_x(x,y), f_y(x,y)$, per tutti gli $(x,y) \in D$. Essendo $f \in C^2(D)$ allora anche le funzioni derivate parziali prime sono differenziabili e definiamo $f$ differenziabile due volte o che ammette differenziale secondo, dato dalla formula $(h = dx, k = dy)$

$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx \ dy + f_{yy} dy^2.$$

Infatti, consideriamo la funzione composta $F(t) = f(x + ht, y + kt)$ con $t \in [0,1]$ e $h$ e $k$ due numeri reali vicini a zero tali che $(x+h, y+k) \in D$ cosi come anche $(x+ht, y+kt) \in D$. Se $f$ é differenziabile in $D$ allora $F$ é derivabile in $[0,1]$ e si ha

$$F'(t) = df = f_x h + f_y k$$

e essendo $f_x, f_y$ differenziabili: $d^2 f = (f_x h + f_y k)_x \ h \ + (f_x h + f_y k)_y \ k =$
$f_{xx} h^2 + f_{yx} kh + f_{xy} hk + f_{yy} k^2 =$
$f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2$

# Formula di Taylor e Mac-Laurin

Consideriamo solo il caso di funzioni di due variabili .
Sia $f \in C^2(D)$, consideriamo un punto $(x_0, y_0)$ interno a $D$ e sia $(x, y)$ un generico punto di un intorno $B_\delta(x_0, y_0)$. Definiamo Polinomio di Taylor del secondo ordine della $f$ nel punto $(x_0, y_0)$ il polinomio di secondo grado in $x$ e $y$:

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)\,(y-y_0)+f_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2\right].$$

Se il punto $(x_0, y_0)$ coincide con l'origine, si chiama polinomio di Mac-Laurin.
Il polinomio di Taylor fornisce un' approssimazione della funzione nell'intorno del punto.

## Formula di Taylor con il resto di Lagrange

Sia $f(x, y)$ una funzione di classe $C^2(B_\delta(P_0))$ con $P_0 = (x_0, y_0)$, interno al campo di definizione di $f$. Sia $P = (x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0)$. Allora esiste un $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \Big[f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\,\Big[f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h\ k$$

$$+f_{yy}\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2\Big].$$

Resto di Lagrange
Riscriviamo brevemente la formula

$$f(x,y) - \Big\{ f(x_0,y_0) + \Big[ f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k \Big] \Big\} = R_2$$

$R_2$ si chiama resto della formula secondo Lagrange e rappresenta l'errore che si commette quando sostituiamo la funzione con un polinomio di Taylor (nel nostro caso il resto e' scritto con le derivate seconde).

# Formula di Taylor al secondo ordine con il resto di Peano

Sia $f$ una funzione di classe $C^2$ in una aperto $A$ di $\mathbb{R}^2$ e $(x, y)$ un punto di $A$. Per $(h, k) \to (0, 0)$ risulta

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x,y)h^2 + 2f_{xy}(x,y)hk + f_{yy}(x,y)k^2\right] + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

Alla forma quadratica $f_{xx}h^2 + f_{yx}kh + f_{xy}hk + f_{yy}k^2$ viene associata la matrice hessiana:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

il cui determinante, detto anche determinante hessiano é dato da

$$H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Definizione Una Forma quadratica in $\mathbb{R}^2$ è un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo

$$q(h_1, h_2) = \sum_{i,j}^{2} a_{ij} h_i h_j$$

dove gli $a_{ij}$ sono numeri reali, coefficienti della forma quadratica. Se tutti gli $a_{ij}$ sono nulli la forma quadratica si dice nulla.
Si può supporre $a_{ij} = a_{ji}$ in tale modo ad ogni forma quadratica si può associare una matrice simmetrica $(a_{ij})_{i,j=1,2}$

# Funzioni di N variabili

I concetti introdotti (limiti, continuita', derivabilita' parziale, differenziabilita') si estendono a funzioni di N variabili

$$w = g(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

esempi per N=3.
Funzione composta in $\mathbb{R}^3$
$w = g(x, y, z)$ composta con $(x(t), y(t), z(t))$

$$w'(t) = g_x(x(t), y(t), z(t))\ x'(t) + g_y(x(t), y(t), z(t))\ y'(t)$$

$$+g_z(x(t), y(t), z(t))\ z'(t).$$