

Analisi Matematica 2

Integrali doppi

Integrali doppi su domini rettangolari.

Sia $f(x, y)$ una funzione limitata nel rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ e sia $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b\}$ una decomposizione di $[a, b]$ e $\mathcal{D}_2 = \{y_0 = c, y_1, \dots, y_n = d\}$ una decomposizione di $[c, d]$.

Il prodotto cartesiano

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ e' una suddivisione di Q .

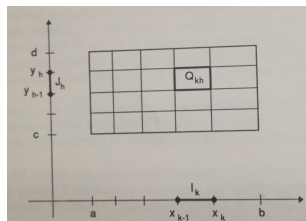
Chiamiamo con

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, m$ il generico subintervallo di \mathcal{D}_1 ,

$J_h = [y_{h-1}, y_h]$, $h = 1, \dots, n$ il generico subintervallo di \mathcal{D}_2

e sia $Q_{kh} = I_k \times J_h$ il generico rettangolo della suddivisione.

La f é limitata, allora $m \leq f(x, y) \leq M$ in Q .



Definizione di Somme superiori e somme inferiori

Fissata una suddivisione

\mathcal{D} , definiamo relativamente a tale suddivisione:

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n m_{kh} \delta_h \delta_k; \quad \text{somme inferiori}$$

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n M_{kh} \delta_h \delta_k, \quad \text{somme superiori}$$

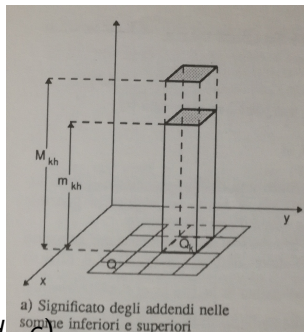
con $m_{kh} = \inf_{Q_{kh}} f$, $M_{kh} = \sup_{Q_{kh}} f$.

Per ogni suddivisione \mathcal{D} del rettangolo Q Si ha

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq M(b-a)(d-c).$$

Inoltre (come nel caso di funzioni di una variabile)

$$\sup s \leq \inf S.$$



Definizione

Una funzione $f(x, y)$ definita e limitata nel rettangolo Q é integrabile secondo Riemann se

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

il valore comune si chiama integrale di Riemann di f su Q e useremo il simbolo

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy$$

Si dimostra che

$$f \in C^0(Q) \implies f \text{ integrabile in } Q$$

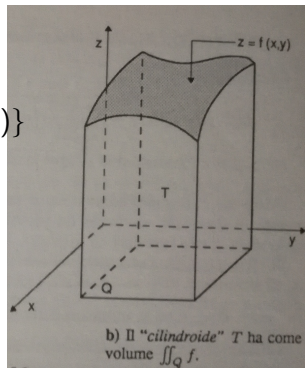
Significato geometrico dell'integrale $\iint_Q f(x,y) dx dy$

Se $f \geq 0$ in Q , allora $\iint_Q f(x,y) dx dy$ rappresenta il volume del solido così definito

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Se la f ha segno qualunque, il volume della parte di spazio compresa tra la funzione f e il piano $z = 0$ è dato da

$$\iint_Q |f(x, y)| dx dy.$$



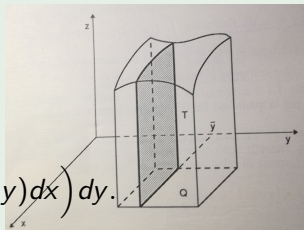
Calcolo di un integrale doppio tramite due integrali semplici

Teorema di riduzione

Sia data una funzione $f(x, y)$ integrabile in Q .

Se
fissato $y \in [c, d]$, esiste $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$,
allora $G(y)$ sarà integrabile in $[c, d]$ e

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$



Se
fissato $x \in [a, b]$, esiste $H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$,
allora $H(x)$ sarà integrabile in $[a, b]$ e

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Se $f(x, y) = g(x) h(y)$ (le variabili sono separate)
con $g(x)$ integrabile in $[a, b]$ ($g(x) \in \mathcal{R}(a, b)$) e $h(y) \in \mathcal{R}(c, d)$, allora
 $f(x, y) \in \mathcal{R}(Q)$ e si ha

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

esempio

Calcolare $\iint_Q x(y + \sqrt{y}) dx dy$, dove $Q = [0, 1] \times [1, 4]$.

Si ha

$$\int_0^1 x dx \int_1^4 (y + \sqrt{y}) dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 =$$

Calcolare $\iint_Q x^{-3} e^{\frac{y}{x}} dx dy$, dove $Q = [1, 2] \times [0, 1]$.

Vediamo quale delle due formule di riduzione é piú conveniente utilizzare:

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 x^{-3} e^{\frac{y}{x}} dx \right) dy \quad \text{oppure} \quad \int_1^2 \left(\int_0^1 x^{-3} e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx ?$$

Essendo $\int_0^1 x^{-3} e^{\frac{y}{x}} dy$ un integrale immediato conviene utilizzare la seconda formula di riduzione.

si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_0^1 x^{-3} e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx &= \int_1^2 \left(x^{-3} e^{\frac{y}{x}} x \Big|_0^1 \right) dx = \int_1^2 x^{-2} (e^{\frac{1}{x}} - 1) dx = \\ &= \left(-e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Integrali doppi su domini normali.

Definizione di dominio normale rispetto all'asse x

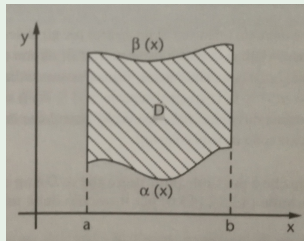
Siano $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$
funzioni continue in un intervallo chiuso e
limitato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Definiamo dominio normale rispetto
all'asse x (o y -semplice) l'insieme del piano

$$D := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

L'area di questo dominio si può calcolare
mediante un integrale semplice

$$\text{area}(D) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$



Definizione di dominio normale rispetto all'asse y

Siano $x = \gamma(y)$, $x = \delta(y)$

funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $[c, d]$ e $\gamma(y) \leq \delta(y)$, $\forall y \in [c, d]$.

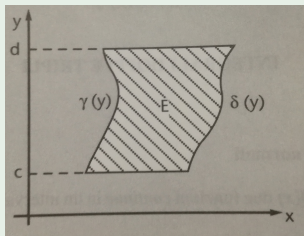
Definiamo dominio normale rispetto all'asse y (o x -semplice) l'insieme del piano

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

L'area di questo dominio si può calcolare mediante un integrale semplice

$$\text{area}(E) = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y)) dy.$$

Si dice che un dominio é normale se é normale rispetto ad entrambi gli assi (quadrato, cerchio, etc.)



Integrali doppi su domini normali

Sia $f(x, y)$ continua in D . Se

$$D := \{x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \implies$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Sia $f(x, y)$ continua in E . Se

$$E := \{y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\} \implies$$

$$\iint_E f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Proprietá degli integrali doppi.

1. **Linearitá** : Se f_1 e f_2 sono integrabili in D e c_1 e c_2 sono costanti,

$$\iint_D c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \, dx dy = c_1 \iint_D f_1(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_D f_2(x, y) \, dx dy$$

2. **Additivitá** : Sia $D = D_1 \cup D_2$ e f integrabile in D ,

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy$$

3. **Monotonia** : Siano f, g integrabili in D e $f \leq g$, allora

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy;$$

se $|f|$ e' integrabile in D ,

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx dy;$$

se $M = \sup_D |f|$, e indichiamo $\text{area}(D) = |D|$,

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M |D|.$$

4. Teorema della media

Se $f \in C^0(D)$, allora esiste un $P_0 = (x_0, y_0)$ tale che

$$\frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0)$$

Calcolare $\iint_D (x^4 + y^2) \, dx dy$, $D = \{1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq x^2\}$

Calcolare $\iint_D (\sqrt{x} y) \, dx dy$, $D = \{0 \leq x \leq 1; \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T x^3 dx dy,$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

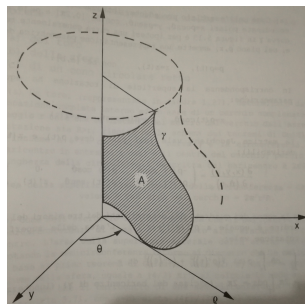
Calcolare il volume del solido limitato da $z = x^2 + y^2 - 1$ che si proietta ortogonalmente sul trapezio rettangolo D di vertici $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(1, 1)$

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| \, dx dy = \iint_{D^-} (1 - x^2 - y^2) \, dx dy + \iint_{D^+} (x^2 + y^2 - 1) \, dx dy.$$

Volume dei solidi di rotazione, Teorema di Guldino

Primo Teorema di Guldino

Il volume del solido di rotazione S generato dalla rotazione di un insieme A attorno ad un asse, é uguale al prodotto dell'area di A per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di A .



Sia $B = (x_0, y_0)$ il baricentro di un insieme A misurabile e limitato del piano x, y , esso ha coordinate:

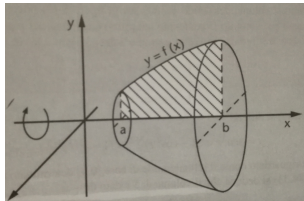
$$x_0 = \frac{1}{|A|} \iint_A x dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{|A|} \iint_A y dx dy,$$

dove $|A| = \text{area (o misura) di } A$.

Se S è il

solido generato dalla rotazione del rettangoloide
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$
attorno all'asse x , si ha

$$\begin{aligned} \text{volume}(S) &= 2\pi |A| \cdot y_0 = 2\pi \iint_A y dx dy = \\ &= 2\pi \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} y dy \right) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \end{aligned}$$



Cambio di variabili negli integrali doppi.

Sia A un dominio normale del piano (u, v) , consideriamo due funzioni di classe $C^1(A)$

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in A.$$

Indichiamo con $\phi : (u, v) \in A \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ e sia invertibile e di classe C^1 con determinante jacobiano

$$|J| = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Indichiamo con $\phi(A) = D$ il codominio di ϕ .

Teorema

Siano A e D due domini regolari di \mathbb{R}^2 e l'applicazione ϕ sia invertibile, di classe C^1 e $|J(u, v)| \neq 0$ in A . Allora per ogni funzione $f(x, y)$ continua in D si ha

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du dv.$$

Se $f(x, y) = 1$ si ha la formula dell'area del dominio piano D (insieme immagine).

Quindi $|J(u, v)| \, du dv = dx \, dy$ rappresenta l'elemento d'area nelle nuove coordinate.

Dominio regolare = dominio normale e le funzioni che lo delimitano sono di classe C^1 .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & 0 < \rho < +\infty, \\ y = \rho \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

con

$$|J(\rho, \theta)| = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

L'applicazione $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $S = \{(\rho, \theta) : \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ permette il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari.

Vale la formula di trasformazione

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta$$

es: calcolare $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$, $D := \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy = \iint_D e^{-\rho^2} \overbrace{\rho}^{=|J|} \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

$|J|$ determinante jacobiano della trasformazione in coordinate polari.

Domini polarmente normali

Consideriamo due funzioni nel piano polare ρ, θ : $\rho = \rho_1(\theta), \rho = \rho_2(\theta)$, continue su un intervallo chiuso e limitato $[\theta_1, \theta_2]$ e sia $\rho_1(\theta) \leq \rho_2(\theta), \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Definizione

Si definisce polarmente normale un dominio D che si può così descrivere

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \end{array} \right.$$

es: Calcolare il volume della porzione di superficie $z = x^2$ che si proietta nel cerchio $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\iint_D x^2 \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 \cos^2 \theta \underbrace{\rho}_{=|J|} d\rho \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Esercizi sugli integrali doppi

Calcolare i seguenti integrali doppi

- $\iint_D (x^2 - xe^y) dx dy$ dove

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3\}.$$

- $\iint_D x \cos(xy) dx dy$ e

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

- $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ e

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ e $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

- $\iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ e $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$
- $\iint_D \frac{y}{1+xy} dx dy$ e $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$