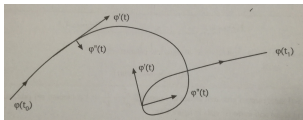


# Analisi Matematica 2

Curve e integrali curvilinei

# Curve in $R^2$ e $R^3$

Intuitivamente: una curva é un insieme di punti nello spazio in cui una particella puó muoversi con un grado di libert a.



Sia  $\gamma$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione continua dove  $\gamma = \mathbf{r}(I)$ .  $\mathbf{r}(t)$  é una **parametrizzazione** di  $\gamma$ .

## Definizione

Si definisce curva in  $\mathbb{R}^3$  un insieme  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  con una sua parametrizzazione  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in I$ .

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

sono dette equazioni parametriche della curva  $\mathbf{r}$  di parametro  $t$ .  $\gamma = \mathbf{r}(I)$  si chiama sostegno della curva.

Se  $t$  é il tempo, allora  $\mathbf{r}(t)$  rappresenta il vettore posizione di una particella al tempo  $t$ . Al variare di  $t$ ,  $\mathbf{r}(t)$  descrive  $\gamma$  detto **sostegno** della curva ( $\gamma$  é quindi un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ ), e si può interpretare come la traiettoria descritta dalla particella.

Quindi una curva é una coppia  $(\gamma, \mathbf{r})$  con  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é una funzione continua.

Spesso, impropriamente, si usa dire "curva  $\gamma$  di equazione  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ."

Analogamente si definisce una curva in  $\mathbb{R}^2$ :

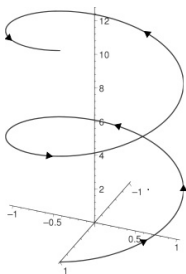
é la coppia  $(\gamma, \mathbf{r}(t))$  dove  $\gamma$  (sostegno della curva) é un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una funzione continua.  $\gamma = \mathbf{r}(I)$ .  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  é una **parametrizzazione** di  $\gamma$ .

Le equazioni parametriche della curva in  $\mathbb{R}^2$  sono del tipo

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos t, \\ y(t) = R \sin t, \\ z(t) = kt, \end{cases} \quad t > 0, \quad \text{rappresenta un'elica circolare.}$$



$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = a \sin t, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ z(t) = 2, \end{cases}$$

rappresenta una circonferenza di raggio  $a$  e centro  $(0, 0, 2)$  nel piano  $z = 2$ .

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = b \sin t, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ z(t) = 2, \end{cases}$$

rappresenta l'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  e centro  $(0, 0, 2)$  nel piano  $z = 2$ .

Una curva si definisce

- **piana**, se  $\gamma$  é contenuto in un piano. In particolare si puó assegnare una curva piana con la funzione continua  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

- **semplice** se  $\mathbf{r}(t)$  é iniettiva, cioé se comunque si prendano due punti distinti  $t_1, t_2$  di cui almeno uno interno all'intervallo  $I$ , allora si ha  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ .

- **chiusa** se  $I = [a, b]$  si ha  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$

- **regolare** se  $\mathbf{r}(t) \in C^1(I)$  con  $I = [a, b]$ , e  
 $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0) \quad \forall t \in (a, b)$

oppure

$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0), \quad \forall t \in (a, b)$

- **regolare a tratti** se  $I$  si puó suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali la curva é regolare.

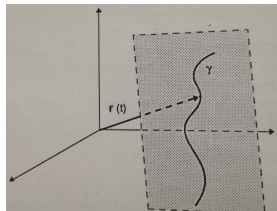
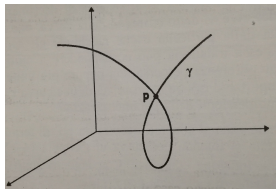
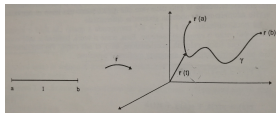


Figure: curva semplice, curva non semplice, curva piana

Una curva é orientata nel verso positivo se segue l'orientamento dei numeri reali dell'intervallo  $I$ .

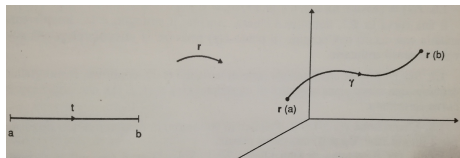


Figure: curva orientata

Se la curva é regolare allora é ben definito il vettore tangente (in cinematica vettore velocità):

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k},$$

il suo modulo é

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}, \quad \text{velocità scalare,}$$

e

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \text{versore tangente,}$$

$$\mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}, \quad \text{vettore accelerazione.}$$

$$\|\mathbf{r}''(t)\| \quad \text{accelerazione scalare.}$$

Anche per una curva in  $\mathbb{R}^2$  si definisce in modo analogo il versore tangente:

$$T(t) = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

Il versore normale é dato da

$$N(t) = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right)$$

Se le equazioni parametriche della curva sono  $(t, f(t))$  (cioé il sostegno della curva é il grafico della funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ), allora il versore normale alla curva é:

$$N(t) = \left( \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}} \right),$$

e quindi é sempre rivolto verso il basso (la seconda componente é negativa).

# Curve rettificabili

Sia  $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  (oppure  $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se si tratta di una curva del piano) una curva di classe  $C^1$ . Se  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  é la lunghezza della poligonale  $\mathcal{P}$  (inscritta nella curva) relativa alla decomposizione  $D$  di  $I = [a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

allora

## Definizione

la curva  $\gamma$  si definisce **rettificabile** se

$$L(\mathbf{r}) = \sup_D \mathcal{L}(\mathcal{P}) = L < +\infty.$$

dove il sup é preso al variare della decomposizione  $D$ .  $L$  si chiama lunghezza della curva.

Tutte le curve regolari sono rettificabili e

$$L(\mathbf{r}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Osservazione. Le curve regolari a tratti sono rettificabili e la loro lunghezza é data dalla somma delle lunghezze dei tratti regolari.

Curve piane.

Se la curva e' data in forma parametrica,  $(x(t), y(t)), \in [a, b]$

$$L(\mathbf{r}) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

- in forma cartesiana:  $y = f(x), x \in [a, b]$ ,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- in forma polare:  $\rho = \rho(\theta), (x = \rho(\theta) \cos \theta, y = \rho(\theta) \sin \theta)$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

calcolare la lunghezza della curva  $\gamma : r(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$

Calcolare la lunghezza della curva  $\gamma : \rho = 2 \cos\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Data la curva  $\gamma = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , calcolare la sua lunghezza.

Calcolare la lunghezza del tratto di elica circolare di equazione  
 $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

## Cambiamento di parametro

Data la curva  $\gamma$  di parametrizzazione  $\mathbf{r}$ , se  $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$  e esiste un'applicazione biunivoca  $g : I \rightarrow \tilde{I}$   $C^1$  tale che  $g'(t) \neq 0 \forall t \in I$  e

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(g(t)),$$

Allora anche  $\tilde{\mathbf{r}}$   $\acute{e}$  una parametrizzazione di  $\gamma$  e la funzione  $g$   $\acute{e}$  detta cambiamento ammissibile di parametro.

$g$   $\acute{e}$  invertibile e la sua inversa  $g^{-1} : \tilde{I} \rightarrow I$   $\acute{e}$  di classe  $C^1$  con  $(g^{-1})'(s) \neq 0, \forall s \in \tilde{I}$ .

Osservazione: Se  $g'(t) > 0$  ( $g$  crescente) il verso di percorrenza sul sostegno  $\gamma$  é lo stesso,

$g'(t) < 0$  ( $g$  decrescente) il verso é l'opposto.

Nel primo caso le curve sono equivalenti.

Esempio:

sia  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\tilde{\mathbf{r}}(s) = (\cos 2s, \sin 2s)$   $s \in [0, \pi]$  due curve che hanno lo stesso sostegno  $\gamma$  cioè la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Il punto che si muove con legge oraria  $\mathbf{r}$  descrive una sola volta la circonferenza  $\gamma$  in senso antiorario cosí come il punto che si muove con legge oraria  $\tilde{\mathbf{r}}$  ma con velocità scalare diversa ( $|\tilde{\mathbf{r}}'|$  é doppia rispetto a  $|\mathbf{r}'|$ ).

Il cambiamento ammissibile di parametro  $g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi]$  che permette di passare da  $\tilde{\mathbf{r}}$  a  $\mathbf{r}$  é dato da  $s = g(t) = \frac{t}{2}$ .

Essendo  $g'(t) = \frac{1}{2} > 0$  allora la curva  $\gamma$  é percorsa nello stesso verso (in questo caso il verso antiorario) sia nella parametrizzazione  $\mathbf{r}$  che nella parametrizzazione  $\tilde{\mathbf{r}}$ .

Consideriamo il cambiamento ammissibile di parametro

$$\tilde{g} : [0, 2\pi] \rightarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right], \quad w = \tilde{g}(t) = \frac{5}{4}\pi - \frac{t}{2}.$$

Allora si ottiene la curva di parametrizzazione

$\phi = (\sin 2w, \cos 2w)$ ,  $w \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]$ , il cui sostegno é sempre la circonferenza unitaria  $\gamma$  di centro l'origine ma percorsa in senso opposto (senso orario) e si ha  $\tilde{g}' = -\frac{1}{2} < 0$

## Curve equivalenti

Due curve  $(\gamma, \mathbf{r})$  e  $(\gamma, \tilde{\mathbf{r}})$  si dicono equivalenti se possono essere ottenute una dall'altra con un cambio di parametro.

Esempio:  $r(t) = (e^t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Sia  $\tau = g(t) = e^t$ , con  $g : [0, 1] \rightarrow [1, e]$ , si ha

$$\tilde{r}(\tau) = (\tau, \log \tau), \quad \tau \in [1, e]$$

con  $g'(t) = e^t > 0$

Consideriamo una curva regolare  $\gamma : r = r(t) \in C_{[a,b]}^1$  di lunghezza  $L$ .  
Introduciamo la funzione integrale

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau, \quad \forall t \in [a, b],$$

(in  $\mathbb{R}^3$  si avrà  $s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau,$ )

che cinematicamente rappresenta lo spazio percorso al tempo  $t$ , partendo da  $r(a)$ .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$  continua, allora anche  $s(t)$  é continua e derivabile e  $s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ .

Inoltre, essendo  $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \neq 0$ , allora  $s$  é una funzione strettamente crescente.

Questo implica che  $s(t)$  é una corrispondenza biunivoca da  $[a, b]$  in  $[0, L]$ . Anche la funzione inversa  $t = t(s)$  é strettamente crescente e derivabile con

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} > 0.$$

Allora la curva di equazione parametrica  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(t(s))$  é equivalente alla curva di equazione parametrica  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ .

Il parametro  $s$  si chiama **ascissa curvilinea** o lunghezza d'arco.

Si scrivera'

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

$$(\text{in } \mathbb{R}^3 : ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.)$$

Riscriviamo la formula della lunghezza di una curva

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

$$(\text{in } \mathbb{R}^3 : L = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.)$$

# Integrale curvilineo di prima specie

Consideriamo una curva regolare (o regolare a tratti) con parametrizzazione  $\mathbf{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se  $f$  é una funzione reale di due variabili reali definita nel sostegno della curva  $\mathbf{r}([a, b])$  ed é continua, allora

## Definizione in $\mathbb{R}^2$

si definisce integrale curvilineo di  $f(x, y)$  esteso all'arco di curva  $\gamma$ , l'integrale

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

## Definizione in $\mathbb{R}^3$

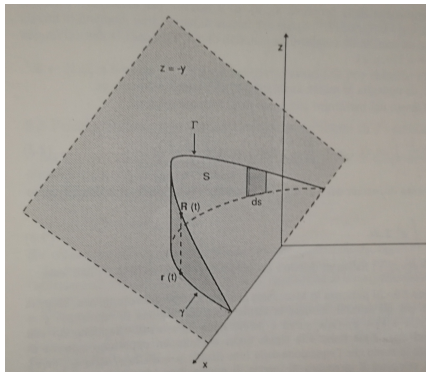
Si definisce integrale curvilineo di  $g(x, y, z)$  esteso all'arco di curva  $\gamma$  l'integrale

$$\int_{\gamma} g ds = \int_a^b g(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

# Significato geometrico di $\int_{\gamma} f \, ds$

$\int_{\gamma} f \, ds$  é l'area  
del pezzo di superficie cilindrica  $S$ .

Nell'esempio,  $f(x, y) = -y$   
e  $\gamma$  é la curva di equazione parametrica  
 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [\pi, 2\pi]$ .



# Proprietá dell'integrale curvilineo

Siano  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  curve regolari contenute in un dominio  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f, g$  funzioni continue definite in  $E$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  si ha

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds, \quad \text{Linearità rispetto all'integranda,}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds, \quad \text{additività rispetto al cammino di integraz.}$$

Se  $\gamma_1$  é equivalente a  $\gamma_2$  (anche se l'orientamento é opposto):

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds, \quad \text{indipendenza dalla parametrizzazione o dall'orientazione}$$

Esercizi.

1) Calcolare  $\int_{\gamma} (x + y^3) ds$  dove  $\gamma$  é il segmento di  $\mathbb{R}^2$  che congiunge i punti  $(0,0)$  e  $(1,1)$ .

2) Calcolare  $\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$ , dove  $\gamma$  é la circonferenza intersezione della superficie sferica  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e il piano  $y = x$ .

3) Calcolare  $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$  dove  $\gamma$  é la curva piana di equazione  $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

4) Calcolare  $\int_{\gamma} z ds$ , dove  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$  di eq.  $r(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ .