Analisi Matematica 2

Superfici e integrali superficiali

Superficie

Sia D un dominio connesso di $\mathbb{R}^2$ (per def. un dominio connesso é la chiusura di un aperto connesso). Consideriamo un'applicazione continua $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ e sia Σ l'immagine di D: $\Sigma := \varphi(D)$ (sostegno della superficie).
φ si chiama parametrizzazione di Σ.

Definizione di superficie

Si dice superficie in $\mathbb{R}^3$ una coppia (Σ, φ) dove Σ é un insieme di $\mathbb{R}^3$ e φ una sua parametrizzazione.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \subset R^2 \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

sono dette equazioni parametriche della superficie.

La parametrizzazione puo' essere assegnata anche in forma vettoriale:

$$\varphi(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}.$$

Al variare di (u,v) in D, il punto $Q = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ descrive una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Se Σ é il grafico di una funzione del tipo $z = f(x,y)$ con $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, allora si dice superficie cartesiana e una sua parametrizzazione puó essere assegnata dall'equazione:

$$\varphi(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}, \quad (x,y) \in D.$$

Definizione di superficie regolare

Si definisce superficie regolare in R^3 una coppia (Σ, φ) dove $\Sigma \subset R^3$ e $\varphi(u, v) \in C^1(D)$ é una parametrizzazione di Σ, tali che $\varphi(D) = \Sigma$ e sono verificate le seguenti condizioni:

$i)$ $\varphi(u, v)$ é iniettiva su $\mathring{D}$ ($\varphi(u, v)$ é invertibile).

$ii)$ $\forall (u, v) \in \mathring{D}$ la matrice jacobiana

$$M = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

ha rango 2.

Il punto $P(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, $(u_0, v_0) \in \mathring{D}$, che soddisfatta la condizione $ii)$, si dice che é un punto regolare.

In caso contrario, P si dice singolare.

Osservazione:

Una superficie cartesiana $z = f(x, y)$ é regolare se la funzione f che la definisce é di classe C^1, cioé la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{bmatrix}$$

ha sempre rango 2.

La condizione *ii*) é equivalente a:

$$A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v) > 0, \quad \forall (u,v) \in \mathring{D},$$

dove $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$ sono i determinati dei minori del secondo ordine della matrice jacobiana M (cioé il vettore (A, B, C) non é nullo).

Un'altra condizione equivalente alla *ii*) é richiedere che per ogni $u, v \in \mathring{D}$ i vettori

$$\varphi_u(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v))$$
$$\varphi_v(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v))$$

siano linearmente indipendenti.

Questa condizione assicura l'esistenza in ogni punto $\varphi(u,v) \in \mathbb{R}^3$, con $(u,v) \in \mathring{D}$, di un unico piano tangente al sostegno Σ della superficie.

Da ora in poi useremo dire superficie Σ di equazione $\varphi(u, v)$ intendendo che si considera la coppia (Σ, φ).

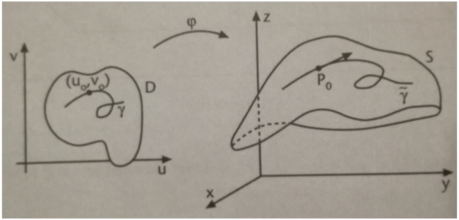
La superficie Σ si dirá

- regolare a tratti se si puó decomporre in un numero finito di superfici regolari,

- chiusa se é limitata e il suo bordo

$B\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \Sigma = \emptyset, \quad \bar{\Sigma} = \textit{chiusura di } \Sigma \textit{ in } \mathbb{R}^3.$

Il bordo di una porzione di superficie definita in D é l'insieme dei punti Q su Σ immagine dei punti $P \in \partial D$.



φ trasforma la curva regolare γ nella curva regolare $\tilde{\gamma}$ cosí come trasforma la frontiera ∂D nel bordo di Σ.

La superficie conica in forma cartesiana $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, in forma parametrica è data da

$$\begin{aligned} x &= u\ cosv, \\ y &= u\ sinv, \qquad 0 \leq u \leq r,\ 0 \leq v \leq 2\pi,\ k > 0. \\ z &= k\ u, \end{aligned}$$

Linee coordinate e vettore tangente

Sia $\varphi(u,v)$ l'equazione della superficie Σ e siano $\varphi(\bar{u},v),\ e\ \varphi(u,\bar{v})$ le curve che si ottengono su Σ considerando $u=\bar{u}\ costante,\ \ v=\bar{v}\ costante$ nel piano (u,v).
Le linee $\varphi(\bar{u},v),\ e\ \varphi(u,\bar{v})$ si chiamano 'linee coordinate' sulla superficie, (u,v) si chiamano 'coordinate locali'. I vettori tangenti alle linee coordinate, saranno

$$\begin{cases} \varphi_u(u,v) = x_u(u,v)\mathbf{i} + y_u(u,v)\mathbf{j} + z_u(u,v)\mathbf{k}, \\ \varphi_v(u,v) = x_v(u,v)\mathbf{i} + y_v(u,v)\mathbf{j} + z_v(u,v)\mathbf{k} \end{cases}$$

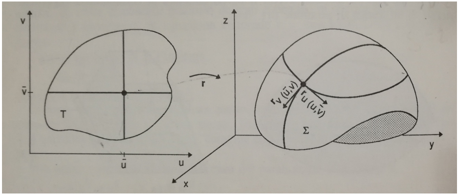


Figure: superficie Σ con parametrizzazione $\mathbf{r} : T \to \mathbb{R}^3$

Consideriamo il prodotto vettoriale

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(yz)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(zx)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(xy)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k}.$$

Si ha che $\varphi(u,v)$ é regolare $\Longleftrightarrow$ ($\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$)
Questo implica che i vettori φ_u e φ_v sono linearmente indipendenti.

Equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Il vettore $\varphi_u \times \varphi_v$ é perpendicolare alla superficie. Il versore normale é dato da

$$\mathbf{n}_e = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

Se la superficie é data in forma cartesiana, le linee coordinate e il versore normale saranno:

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y),$$

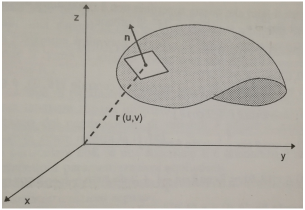
$\mathbf{n}_e = \frac{(-f_x,\ -f_y,\ 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$

Riscriviamo l'equazione del piano tangente in (x_0, y_0, z_0)

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \ - \ f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \ + \ (z - z_0) = 0$$

La scelta del versore normale alla superficie determina l'orientazione della superficie stessa.
La scelta di $\mathbf{n}$ o $-\mathbf{n}$ come versore normale corrisponde a privilegiare uno dei due lati (o pagine o facce) di una superficie.

Sia Σ una superficie regolare , essa si dirá orientabile se scegliendo il versore normale alla superficie in un punto $\mathbf{P}_0 \in \Sigma$ e seguendo una qualunque curva regolare e chiusa (che quindi ritorni in $\mathbf{P}_0$) sulla superficie, il versore normale varia con continuitá e ritorna alla posizione iniziale. La scelta del versore normale determina l'orientazione della superficie.



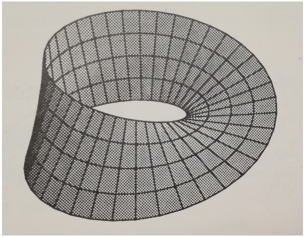


Figure: superficie orientabile, superficie non orientabile

Area di una Superficie

Definizione di area di una superficie

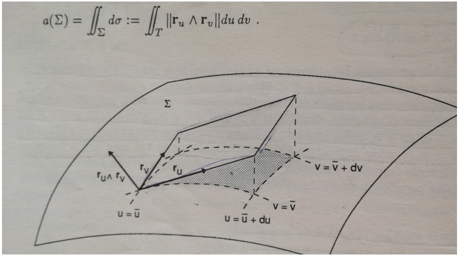
Sia Σ una superficie regolare e $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Si definisce area della superficie Σ il numero

$$area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D |\varphi_u \times \varphi_v| \, dudv.$$

Se Σ é data in forma cartesiana : $z = f(x,y), \ (x,y) \in D$

$$area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \; dxdy.$$

L'espressione $d\sigma = |\varphi_u \times \varphi_v| \, dudv$ é detto elemento d'area.



Data la superficie regolare $(\Sigma, \mathbf{r})$, i lati del parallelogramma curvilineo sono approssimati a meno di infinitesimi di ordine superiore a du e dv da quelli del parallelogramma rettilineo individuato dai vettori $\mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{r}_v dv$

Esercizi

1) Calcolare l'area della superficie Σ di equazione
$\varphi(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, $(u,v) \in [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi]$

Svolgimento
$area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D |\phi_u \times \phi_v| dudv$
Si ha $\phi_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 2u)$, $\phi_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 0)$ e

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = -2u^2\sin v\mathbf{i} - 2u^2\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

e $d\sigma = |\phi_u \times \phi_v| dudv = u\sqrt{4u^2+1}dudv$

Allora
$\iint_D |\phi_u \times \phi_v| dudv = \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4u^2+1}du \int_0^{2\pi} dv = \cdots = \frac{13}{3}\pi$

Esercizi

2) Calcolare l'area della porzione di superficie Σ di equazione $z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)$ che si proietta nel triangolo T di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$.

Svolgimento

La superficie è in forma cartesiana, allora
$area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy$ con

$f_x = x^{\frac{1}{2}},\ f_y = y^{\frac{1}{2}}$ e $T : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3 - x\}$

Allora $\iint_T \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \iint_T \sqrt{1 + x + y} dxdy =$
$\int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \sqrt{1 + x + y} dy \right) dx = \cdots = \frac{116}{15}$

Esercizi

3) Calcolare l'area della porzione di superficie $z = xy$ che si proietta nel cerchio $D = \{(x, y)| \ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Svolgimento

La superficie è in forma cartesiana, allora
$area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy$ con

$\nabla f = (f_x, f_y) = (y, x)$ quindi $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

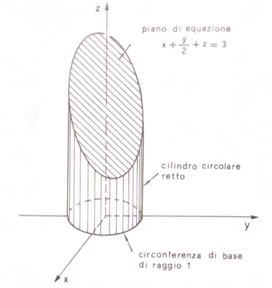
Si ha $\iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

Passando alle coordinate polari

$$\begin{cases} x & = \rho \cos\theta \\ y & = \rho \sin\theta \end{cases} \quad con \quad \begin{cases} 0 & \leq \rho \leq 1 \\ 0 & \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \qquad |J| = \rho,$$

si ottiene $\iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{2}{3}\pi[2^{\frac{3}{2}} - 1]$.

4) Calcolare l'area della superficie Σ del solido in figura così definito
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 \leq z \leq 3 - x - \frac{y}{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$



Si ha $area(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \int_{\Sigma_1} d\sigma_1 + \int_{\Sigma 2} d\sigma_2 + \int_{\Sigma_3} d\sigma_3$

Σ_1 è la porzione di piano $z = 3 - x - \frac{y}{2}$ che si proietta nel cerchio D di centro l'origine e raggio 1, quindi $f(x,y) = 3 - x - \frac{y}{2}$, $\nabla f = (-1, -\frac{1}{2})$, $d\sigma_1 = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} dxdy = \frac{3}{2} dxdy$

$$area(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} d\sigma_1 = \frac{3}{2} \iint_D dxdy = \frac{3}{2}\pi.$$

Σ_2 è il cerchio di base di centro l'origine e raggio 1, quindi $area(\Sigma_2) = \pi$

Σ_3 è la superficie laterale del cilindro delimitata da $z = 0$ e $z = 3 - x - \frac{y}{2}$. L'area della superficie Σ_3 si può calcolare con l'integrale curvilineo $area(\Sigma_3) = \int_\gamma (3 - x - \frac{y}{2}) ds$ dove
$\gamma : (\cos t,\ \sin t,\ 3 - \cos t - \frac{1}{2}\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$
oppure con l'integrale superficiale $\int_{\Sigma_3} d\sigma_3$ dove l'equazione parametrica della superficie cilindrica è

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= z \end{cases} con \quad \begin{cases} 0 &\le t \le 2\pi \\ 0 &\le z \le 3 - \cos t - \frac{1}{2}\sin t. \end{cases}$$

L'integrale curvilineo $\int_\gamma (3 - x - \frac{y}{2})ds$ non è immediato, mentre il calcolo di quello superficiale è molto più semplice:

$\int_{\Sigma_3} d\sigma_3 = \iint_D |\phi_t \times \phi_z| dtdz$

dove $\phi_t = (-\sin t, \cos t, 0)$ e $\phi_z = (0, 0, 1)$ e perciò

$\phi_t \times \phi_z = (\cos t, \sin t, 0)$ e

$d\sigma_3 = |\phi_t \times \phi_z| dtdz = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dtdz = dtdz$

Si ottiene così

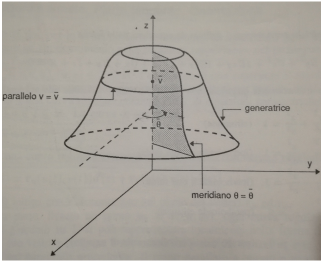
$$\begin{aligned} area(\Sigma_3) &= \iint_D |\phi_t \times \phi_z| dtdz = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{3-\cos t - \frac{1}{2}\sin t} dz \\ &= \int_0^{2\pi} (3 - \cos t - \frac{1}{2}\sin t) dt = 6\pi \end{aligned}$$

L'area della superficie del solido T è allora

$area(\Sigma_1) + area(\Sigma_2) + area(\Sigma_3) = \pi + \frac{3}{2}\pi + 6\pi = \frac{17}{2}\pi$

Area di una superficie di rotazione, secondo teorema di Guldino

Se si fa ruotare una curva piana γ intorno ad un asse che giace nel piano della curva si ottiene una superficie di rotazione, γ si chiama generatrice.



Secondo teorema di Guldino

L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo α di una curva regolare γ é data dalla lunghezza della curva γ moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto nella rotazione dal baricentro.

Si consideri la curva γ di equazioni parametriche $\gamma(t) : (x(t), z(t))$ con $t \in [a, b]$ e $x(t) > 0 \;\; \forall t \in (a, b)$, ruotando attorno all'asse z di un angolo $\alpha \in (0, 2\pi))$ si ottiene una superficie di rotazione Σ di area:

$$A(\Sigma) = \alpha x_B L(\gamma) = \alpha \int_\gamma x ds,$$

con $x_B = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds$ ascissa del baricentro B della curva γ (che é il raggio dell'arco di circonferenza descritta da B) e $L(\gamma)$ la lunghezza della curva γ.

Infatti la superficie di rotazione Σ ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \cos\theta \\ y = x(t) \sin\theta \qquad (t, \theta) \in D = [a, b] \times [0, \alpha] \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$A(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D |\varphi_t \times \varphi_\theta| dt d\theta$$

Essendo

$$\varphi_t \times \varphi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' \cos\theta & x' \sin\theta & z' \\ -x\sin\theta & x\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -z'x\cos\theta\mathbf{i} - z'x\sin\theta\mathbf{j} + x'x\mathbf{k}$$

e $|\varphi_t \times \varphi_\theta| = \sqrt{(z')^2x^2\cos^2\theta + (z')^2x^2\sin^2\theta + (x')^2x^2}$

$= x\sqrt{(x')^2 + (z')^2} \qquad (x(t) > 0 \;\; \forall t \in (a, b))$

$$A(\Sigma) = \int_0^\alpha d\theta \int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

Integrale superficiale

Sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con sostegno $\Sigma := \varphi(D)$. Sia $g(x, y, z)$ una funzione continua definita su Σ.

Definizione di integrale superficiale

Si definisce integrale superficiale di g esteso a Σ:

$$\int_\Sigma g(x, y, z) d\sigma = \iint_D g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\varphi_u \times \varphi_v| \; dudv.$$

Se Σ é data in forma cartesiana : $z = f(x, y), \; (x, y) \in D$

$$\int_\Sigma g(x, y, z) \; d\sigma = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \; \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \; dxdy.$$

Esempi: Calcolare

$$\int_\Sigma (x + 2(y-2) + z)\ d\sigma$$

dove $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 2 - x - y \ con \ x^2 + y^2 \leq 1/16\}$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} arctg \frac{y}{x}\ d\sigma$$

dove $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = x^2 + y^2\ con\ 1 \leq z \leq 4\}$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{d\sigma}{1+4z}$$

dove $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 \ con \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Applicazione: flusso del campo F attraverso Σ nella direzione $\mathbf{n}$

Sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare di equazioni $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e sia $\mathbf{n}(u, v)$ il versore normale alla superficie nel punto $\varphi(u, v)$. Sia $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe C^1 definito sul sostegno Σ di φ. L'integrale del campo vettoriale $\mathbf{F}$ su Σ si chiama flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ nella direzione $\mathbf{n}$ ed é dato dalla formula

$$\iint_\Sigma < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma.$$

Altro simbolo per rappresentare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ:

$$\int_\Sigma < \mathbf{F}, \mathbf{n} > d\sigma.$$

1) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xy, z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0\}$.

si ha

$$\iint_\Sigma < F, n > d\sigma = \iint_D (2x^2y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)dxdy$$

in quanto la superficie ha equazione cartesiana $z = 1 - x^2 - y^2$ e il versore normale alla superficie é

$\vec{\mathbf{n}} = \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$, $d\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy$, D é il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Si ottiene

$\iint_D (2x^2y + 2xy^2 + 1 - x^2 - y^2)dxdy =$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2\rho^4 \cos^2\theta \sin\theta + 2\rho^4 \cos\theta \sin^2\theta + \rho(1 - \rho^2)d\rho = \frac{\pi}{2}$

2) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ attraverso la superficie Σ di equazione $\varphi(u, v) = u^2\mathbf{i} + \sqrt{2}uv\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$ con φ definita in $D = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq u^2 + v^2 \leq 2, \quad 0 \leq u \leq v\big\}$.

2) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ attraverso la superficie Σ di equazione $\varphi(u, v) = u^2\mathbf{i} + \sqrt{2}uv\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$ con φ definita in $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq u^2 + v^2 \leq 2, \quad 0 \leq u \leq v\}$.

Si ha:

$$\iint_\Sigma < F, n > d\sigma = \iint_C (1, 0, 1)(2\sqrt{2}v^2, -4uv, 2\sqrt{2}u^2)dudv$$

in quanto la superficie ha equazione parametrica dove $\varphi_u = (2u, \sqrt{2}v, 0)$, $\varphi_v(0, \sqrt{2}u, 2v)$, il versore normale alla superficie é

$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|} = \frac{(2\sqrt{2}v^2, -4uv, 2\sqrt{2}u^2)}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$, $d\sigma = |\varphi_u \times \varphi_v|dudv$, D é una porzione della corona C circolare di raggi 1 e $\sqrt{2}$ del primo quadrante con $v \geq u$. Si ottiene

$\iint_C (1, 0, 1)(2\sqrt{2}v^2, -4uv, 2\sqrt{2}u^2)dudv = \iint_C 2\sqrt{2}(u^2 + v^2)dudv =$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\rho^3 d\rho = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$

3) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = ye^{-x}\mathbf{j}$ attraverso la porzione di superficie $\Sigma : \; z = y > 0$ che si proietta nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$,

Si ha

$$\iint_{\Sigma} < F, n > d\sigma = \iint_{D} (0, ye^{-x}, 0)(0, -1, 1) dxdy$$

in quanto la superficie ha equazione cartesiana $z = y$ (cioé un piano passante per l'origine del sistema di riferimento e taglia il cilindro $x^2 + y^2 = 1$) il versore normale alla superficie é

$\vec{\mathbf{n}} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$, $d\sigma = \sqrt{2} dxdy$, D é il semicerchio del piano $X \; Y$ di centro $(0, 0)$ e di raggio 1 (in coordinate polari: $D := \{x = \rho cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \rho \in [0, 1]\})$. Si ottiene

$\iint_D (0, ye^{-x}, 0)(0, -1, 1) dxdy = \iint_D -ye^{-x} dxdy = -\frac{2}{e}$