Analisi Matematica 2

Trasformazioni integrali

Trasformazioni integrali.

1) Formule di Gauss-Green:

nel piano: trasformano un integrale doppio in un integrale curvilineo,

2) Teorema della divergenza

nel piano: trasforma un integrale doppio in un integrale curvilineo,

nello spazio: trasforma un integrale triplo in un integrale superficiale.

3) Teorema di Stokes:

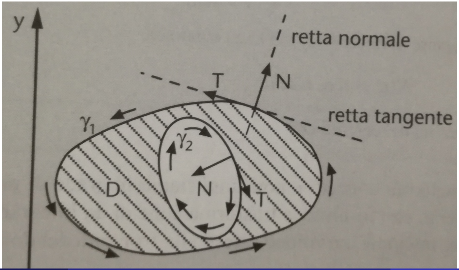
trasforma un integrale superficiale in un integrale curvilineo.

Dominio regolare

D si dice dominio regolare se é l'unione di un numero finito di domini normali (rispetto a x o a y) regolari $D_1, D_2, \ldots, D_N$ a due a due privi di punti interni in comune.

Se D é un dominio regolare, la sua frontiera ∂D é unione di un numero finito di curve regolari a tratti.

Con il simbolo $+\partial D$ si indica l'orientamento positivo della frontiera del dominio D cioé la frontiera é orientata in maniera tale che, percorrendola, si lascia il dominio alla propria sinistra (il versore normale $\vec{\mathbf{N}}$ in ogni punto di ∂D risulta esterno a D).



Formule di Gauss-Green nel piano

formula di Gauss-Green

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e sia $f(x, y)$ una funzione di classe $C^1(D)$. Allora

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx\ dy \ = \ \int_{+\partial D} f\ dy \quad (1^a\ formula\ di\ di\ Gauss - Green)$$

e

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx\ dy \ = \ - \int_{+\partial D} f\ dx, \quad (2^a\ formula\ di\ Gauss - Green).$$

Dimostrazione della 1^a formula

Essendo D un dominio normale possiamo rappresentarlo nella forma

$D = \{c \leq y \leq d;\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ *D normale rispetto all'asse y*,

e per le formule di riduzione degli integrali doppi si ha

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx\ dy\ = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d [f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)] dy.$$

Calcoliamo ora l'integrale su ∂D

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} f\ dy &= \int_c^d f(\delta(y), y) dy + \int_d^c f(\gamma(y), y) dy \\ &= \int_c^d [f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)] dy\end{aligned}$$

gli integrali nei tratti orizzontali sono nulli in quanto $dy = 0$.

Teorema della divergenza

Siano $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (F_1(x,y),\ F_2(x,y)) \in C^1(D)$, e sia D un dominio regolare (normale rispetto ad entrambi gli assi),

$$\iint_D div\ \vec{\mathbf{F}} dx\ dy \ = \ \int_{+\partial D} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{N})\ ds,$$

dove $div\ \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ e $\vec{\mathbf{N}}$ é il versore normale esterno alla frontiera ∂D, s é l'ascissa curvilinea sulla frontiera di D.

Dimostrazione. Si ottiene sommando le due formule di Gauss-Green (nella prima formula si mette F_1 al posto di f e nella seconda formula F_2 al posto di f)

$$\iint_D div\ \vec{\mathbf{F}} dx\ dy = \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dxdy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy.$$

Se le equazioni parametriche della frontiera ∂D sono $(x(t), (y(t)), \quad t \in [a, b]$, e inducono un verso che coincide con quello positivo della frontiera, ricordando che $\vec{\mathbf{N}} = \left(\frac{y'(t),\ -x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$ si ha

$\int_{\partial D} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{N})\ ds = \int_a^b \left(F_1 y' - F_2 x' \right) dt = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$

e quindi il teorema è dimostrato.

Teorema della divergenza nello spazio

Siano $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(V)$, e sia V un dominio regolare, con frontiera (∂V) una superficie regolare o regolare a tratti orientabile

$$\iiint_V div\ \vec{\mathbf{F}} dx\ dy\ dz\ =\ \iint_{+\partial V} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}})\ d\sigma.$$

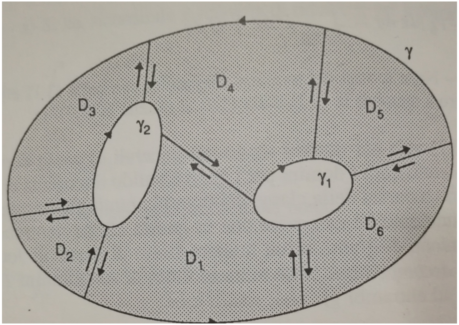
Significa che il flusso di $\vec{\mathbf{F}}$, uscente da ∂V (superficie che é frontiera di V) uguaglia l'integrale della divergenza di $\vec{\mathbf{F}}$ in V.
$\vec{\mathbf{n}}$ é il versore normale alla superficie $+\partial V$.

$$\textit{Integrale triplo} \quad \Longrightarrow \quad \textit{Integrale superficiale}$$

(un dominio in $\mathbb{R}^3$ è regolare se è normale rispetto ai piani xy, yz, zx e quindi non è necessario specificare il piano di riferimento)

Le formule si estendono ad un dominio, unione di domini regolari.

La frontiera sara' l'unione di un numero finito di curve regolari a tratti. (l'integrale curvilineo lungo i tratti percorsi due volte ma in verso opposto, da un contributo nullo)



Applicazione ai differenziali esatti

Teorema

Sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ una forma differenziale lineare definita in D dominio semplicemente connesso. Se ω é chiusa in D cioé se

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

allora ω é anche esatta in D.

Dimostrazione: sia γ una qualunque curva chiusa e regolare a tratti contenuta in D semplicemente connesso. Bastera' dimostrare che $\oint_{+\gamma} F_1\ dx +\ F_2\ dy = 0.$ $(\forall \gamma)$.
Infatti, applicando le formue di Gauss-Green si ha

$$\oint_{+\gamma} F_1\ dx +\ F_2\ dy = \iint_A \Big[\overbrace{-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}}^{=0 \quad (\omega\ \grave{e}\ chiusa)} \Big] dxdy = 0,$$

dove $A \subseteq D$ é il dominio di cui γ é frontiera.

Applicazioni al calcolo delle aree di domini piani

Ricordiamo che

$$mis(D) = \iint_D dx\, dy.$$

Dalle formule di Gauss-Green, ponendo nella prima formula $f(x,y) = x$ si ha

$$mis(D) = \int_{+\partial D} x\, dy.$$

Ponendo nella seconda formula $f(x,y) = y$ si ha

$$mis(D) = -\int_{+\partial D} y\, dx.$$

Sommando le due espressioni, si ha

$$mis(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x\, dy \; - \; y\, dx.$$

Calcolare l'area dell'ellisse $\{x = a\ cost;\ y = b\ sint,\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\ cost)(b\ cost) - (b\ sint)(-a\ sint)]\ dt = \pi ab.$$

Esercizi.

Formule di Gauss-Green. Enunciare le ipotesi di validita' e dimostrarne una a piacere. Utilizzandola calcolare l'integrale

$$a) \quad \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \; dy,$$

dove D é il dominio definito dalle disequazioni:

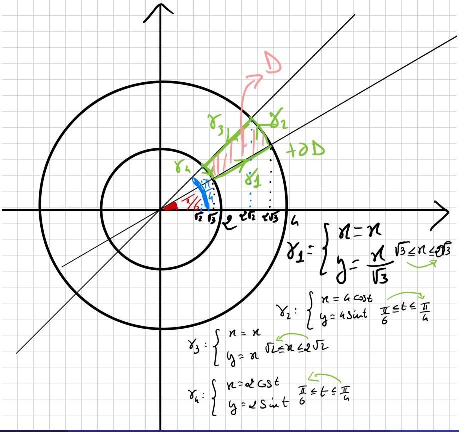
$$4 \le x^2 + y^2 \le 16, \quad 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x.$$

Svolgimento

Utilizzando la seconda formula di G-G si ha

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\;dy = -\int_{+\partial D} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

con $+\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Si ha

$$
\begin{aligned}
&-\int_{+\partial D}\sqrt{x^2+y^2}dx=-\int_{+\gamma_1}\sqrt{x^2+y^2}dx-\int_{+\gamma_2}\sqrt{x^2+y^2}dx\\
&-\int_{+\gamma_3}\sqrt{x^2+y^2}dx-\int_{+\gamma_4}\sqrt{x^2+y^2}dx\\
&=-\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{x^2+\frac{x^2}{3}}dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{16\cos^2 t+16\sin^2 t}(-4\sin t)dt\\
&-\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+x^2}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4\cos^2 t+4\sin^2 t}(-2\sin t)dt\\
&=-\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}xdx+16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin t dt-\sqrt{2}\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}xdx+4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sin t dt\\
&=-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2\Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}-16\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-4\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\cdots\\
&=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

$$b) \quad \iint_D y \; dxdy,$$

dove D é il dominio definito :

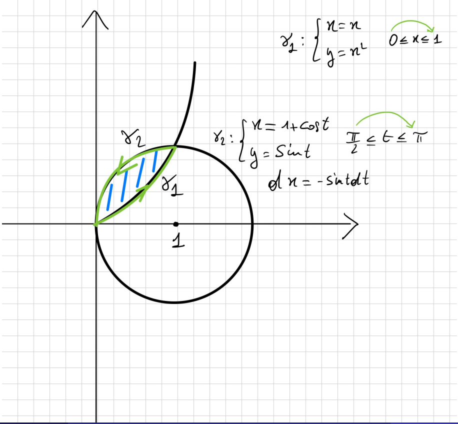
$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \quad y \geq x^2, \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

Svolgimento

Utilizzando la seconda formula di G-G si ha (si può usare anche la prima formula ma i calcoli sono leggermente più lunghi)

$$\iint_D y dx\ dy = -\int_{+\partial D} \frac{y^2}{2} dx$$

con $+\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$



Si ha

$$
\begin{aligned}
-\int_{+\partial D} \frac{y^2}{2} dx &= -\int_{+\gamma_1} \frac{y^2}{2} dx - \int_{+\gamma_2} \frac{y^2}{2} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{x^4}{2} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{2} \cdot (-\sin t) dt = \cdots = \frac{7}{30}.
\end{aligned}
$$

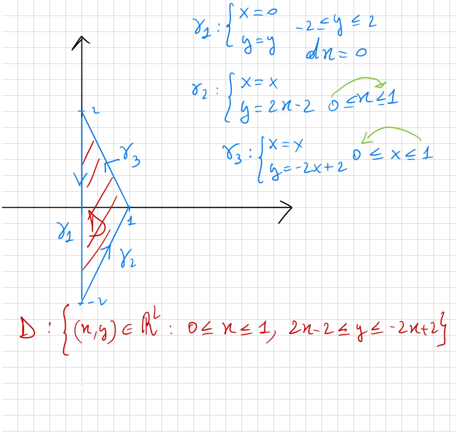
1) Seconda formula di Gauss-Green: Applicarla con $f(x, y) = \arctan y$, dove D é il triangolo di vertici $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, -2)$ (calcolare entrambi gli integrali).

Svolgimento

Utilizzando la seconda formula di G-G si ha

$$\iint_D \frac{\partial(\arctan y)}{\partial y} dx\ dy = -\int_{+\partial D} \arctan y dx$$

con $+\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$



Sia Σ una superficie regolare, orientabile e con bordo $B\Sigma$ costituito da una curva chiusa regolare a tratti.

Scegliendo un verso per la normale $\vec{\mathbf{n}}$ su Σ si determinano due lati: per convenzione quello positivo é quello verso il quale punta $\vec{\mathbf{n}}$, l'altro é negativo.

Si dice che $B\Sigma$ é orientato positivamente rispetto a Σ se, percorrendo $B\Sigma$ mantenendosi sul lato positivo di Σ si lasciano i punti di Σ a sinistra.

Teorema di Stokes

Sia $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + F_2(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$ un campo vettoriale $\in C^1(V)$, V aperto di $\mathbb{R}^3$, e sia Σ una porzione di superficie di equazione $\varphi(u,v),(u,v) \in D$, di classe $C^2(D)$, regolare, orientabile $\Sigma \subset V$, con bordo $(B\Sigma)$ una curva regolare o regolare a tratti orientata positivamente

$$\iint_{\Sigma} (\textbf{rot } \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = \int_{+B\Sigma} (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}) \, ds,$$

dove il $\vec{\mathbf{T}}$ é il versore tangente a $+B\Sigma$.

Significato fisico: il flusso del rotore di $\vec{\mathbf{F}}$ attraverso Σ nella drezione $\vec{\mathbf{n}}$ uguaglia la circuitazione di $\vec{\mathbf{F}}$ lungo $+B\Sigma$.

Ricordiamo che

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

e

$$rot\ \vec{\mathbf{F}} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big)\vec{\mathbf{i}} + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\Big)\vec{\mathbf{j}} + \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\vec{\mathbf{k}}$$

$$(per\ \ brevita'\ \ rot\vec{\mathbf{F}} := H\vec{\mathbf{i}} + L\vec{\mathbf{j}} + M\vec{\mathbf{k}})$$

Se la superficie é data in forma cartesiana $z = f(x, y), (x, y) \in D$ e il bordo

$$B\Sigma : \{x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)),\ t \in [a, b]\},$$

$\vec{\mathbf{n}} = \frac{(-f_x,\ -f_y,\ 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$,
si ha

$$\iint_{\Sigma} (\textbf{rot } \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}) d\sigma = \iint_{D} (H, L, M) \cdot (-f_x,\ -f_y,\ 1) dxdy =$$

$$= \int_{+B\Sigma} F_1\ dx + F_2\ dy + F_3\ dz.$$

Corollario 1

Se $h(x, y, z) \in C^2(V)$, allora l'integrale curvilineo di ∇h attorno al bordo di ogni superficie orientata é zero.

Dim.

$$\int_{+B\Sigma} (\nabla h \cdot \mathbf{T})\ ds = \iint_{\Sigma} (\mathbf{rot}\ \nabla h \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0,$$

perché $\mathbf{rot} \nabla h = \mathbf{0}$.

Corollario 2

L'integrale superficiale di $\mathbf{rot}\vec{\mathbf{F}}$ su una superficie orientata dipende solo dal bordo della superficie, cioé se $B\Sigma_1 = B\Sigma_2 \implies$

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n_1}}) d\sigma_1 = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{rot}\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n_2}}) d\sigma_2$$

Dim.

Discende direttamente dal Teorema di Stokes.

Esercizi

1) Utilizzando il teorema di Stokes calcolare, $\int_{+\gamma}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})ds$, dove $\mathbf{F} = (1+2z, y^2, xy)$ e γ è la curva intersezione del piano $z = 2 - x - y$ con il cilindro $x^2 + y^2 \leq 1/16$.

Svolgimento.

Utilizzando il teorema di Stokes, si deve trasformare l'integrale curvilineo in un superficiale. Calcoliamo il

$$\textbf{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1+2z & y^2 & xy \end{vmatrix} = x\,\vec{\mathbf{i}} + (2-y)\vec{\mathbf{j}}$$

Si ha

$$\int_{+\gamma}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})ds = \iint_{\Sigma}(\textbf{rot } \mathbf{F}\cdot\mathbf{n_e})d\sigma = \iint_{D}(x, 2-y, 0)(1,1,1)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/4} \rho(\rho(cos\theta - sen\theta) + 2)d\rho = \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 2. Consideriamo il campo $\mathbf{F} = (z, x, y)$ e la curva intersezione delle superfici

$$\Sigma_1 : z = 2x + 2y - 1, \ e \ \Sigma_2 : z = x^2 + y^2.$$

Consideriamo inoltre le porzioni delle superfici che hanno la curva come bordo. Calcolare

$$\iint_{\Sigma_1} (\textbf{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}) d\sigma_1, \quad \iint_{\Sigma_2} (\textbf{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}) d\sigma_2, \quad \int_{+B\Sigma_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds,$$

I tre integrali saranno uguali come conseguenza del teorema di Stokes.

Le porzioni delle due superfici considerate si proiettano sul cerchio $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. $\mathbf{rot\ F} = (1,1,1)$. Dalla superficie $\Sigma_1 : z = 2x + 2y - 1$, abbiamo $\mathbf{n_1} = \frac{(-2,-2,1)}{\sqrt{1+4+4}}$

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{rot\ F} \cdot \mathbf{n_1}) d\sigma_1 = \iint_D (-3) dxdy = -3\pi.$$

Dalla superficie $\Sigma_2 : z = x^2 + y^2$, si ha $\mathbf{n_2} = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

$$\iint_{\Sigma_2} (\textbf{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}) d\sigma_2 = \iint_D (-2x - 2y + 1) dxdy = -3\pi.$$

Le equazioni parametriche di
$B\Sigma_1 = B\Sigma_2 = (x = 1 + cos\ t,\ \ y = 1 + sin\ t, z = 2cost + 2sint + 3)$ con $t \in [0, 2\ \pi]$

$$\int_{+B\Sigma_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds = \int_{+B\Sigma_1} zdx + xdy + ydz =$$

$$\int_0^{2\pi} [(2cost{+}2sint{+}3)(-sint){+}(1{+}cost)(cost){+}(1{+}sint)(-2sint{+}2cost)]dt$$
$= -3\pi.$

Es.3
Calcolare,

$$\int_{+B\Sigma} z\ dx - ydy + xy\ dz,$$

utilizzando il teorema di Stokes, dove $B\Sigma$ e' la curva intersezione del piano $z = 1 - y$ con il cilindro $x^2 + y^2 = 1/9$.

Es.4.
Calcolare

$$\iint_{\Sigma} (\textbf{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

con $F = (1 - 3y,\ 1 - 3y,\ 2z^2)$ e $\Sigma = \{z = 2(x^2 + y^2),\ con\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

NOTAZIONI

Per indicare un vettore o un campo vettoriale, abbiamo utiizzato i simboli $\vec{\mathbf{F}}$, $\mathbf{F}$.

Il versore normale alla superficie é stato indicato con i simboli $\vec{\mathbf{n}}$ e $\vec{\mathbf{n_e}}$ (oppure $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n_e}$).