
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025
PRIMO APPELLO - 16/06/2025

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 2z + 2)}$$

- classifica le singolarità della funzione e calcola i residui per le singolarità nel semipiano $\text{Im}(z) > 0$
- scrivi i primi due termini della serie di Taylor-Laurent intorno a $z = i$, specificando il raggio di convergenza
- calcola con metodi complessi il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$$

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{per } -\pi \leq x < \pi.$$

- scrivi lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo indicato
- considerando $f(0)$, dimostra che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Esercizio 3. Data la seguente funzione

$$f(t) = \theta(-t)te^{3t},$$

- utilizzando le opportune proprietà, calcola la trasformata di Fourier $g(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$
- calcola la trasformata di Fourier della funzione $f(t) \cos(t)$

Esercizio 4. Date le seguenti matrici

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1-i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

- verifica che H è hermitiana e che U è unitaria
- ricava autovalori e autovettori (anche non normalizzati) di entrambe
- determina se H e U possiedono una base di autovettori comuni, ed eventualmente determinala