
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025
SECONDO APPELLO - 30/06/2025

Esercizio 1. Calcola con metodi complessi il seguente integrale, seguendo i passaggi indicati:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{2 + \sin \theta} d\theta$$

- individua, con opportuno cambio di variabile, la funzione complessa $f(z)$ da utilizzare
- trova le singolarità di $f(z)$ al finito e calcola i residui rilevanti per l'integrale I
- scrivi i primi due termini della serie di Taylor-Laurent intorno al polo di parte immaginaria nulla, specificando il raggio di convergenza

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{per } -1 \leq x < 1.$$

- scrivi lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ nell'intervallo indicato
- considerando $f(0)$, calcola $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Esercizio 3. Sapendo che la trasformata di Laplace di $f(t) = \sin t$ è $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, calcola l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni

- $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$
- $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
- $F(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$

Esercizio 4. Indicando con $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ una terna ortonormale in \mathbb{C}^3 , l'operatore A è definito da:

$$A = \alpha (|v_1\rangle\langle v_2| + |v_2\rangle\langle v_1|) + \beta (|v_1\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_1|) + \gamma (|v_2\rangle\langle v_3| + |v_3\rangle\langle v_2|)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- Scrivi A in forma matriciale e determina di che matrice si tratta
- Determina α, β, γ in modo che $|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle + |v_3\rangle$ sia autovettore di A con autovalore 1
- Ricava in questo caso autovalori e autovettori normalizzati di A