Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Fondamenti di teoria della probabilità

Corso integrato di Fondamenti di Ingegneria dell'informazione

Modulo di Elementi di analisi dei segnali biomedici

Prof. Danilo Pani

MeDSP
Medical Devices and Signal Processing Lab

Obiettivi

- La teoria della probabilità è alla base della descrizione dei fenomeni non deterministici, che possono dar vita a segnali non deterministici. Per l'esattezza, un segnale non deterministico è una realizzazione di un processo stocastico (casuale), un'estensione del concetto di variabile aleatoria (una funzione che mappa l'esito di un esperimento casuale sull'asse reale), che affonda le sue radici nella teoria classica della probabilità, quella legata alla **teoria dei giochi**.
- L'obiettivo della lezione è:
  - Introdurre il concetto di probabilità, sfruttando definizioni intuitive, e addentrandoci quindi nella definizione assiomatica, che struttura il sapere in modo matematico, così da garantire applicabilità a diversi problemi, anche complessi.
  - Presentare i fondamentali teoremi con applicazione pratica diretta, la probabilità condizionata, il teorema di Bayes e quello della probabilità assoluta, alla base per lo studio avanzato dei *modelli Bayesiani* e delle *reti Bayesiane*.

Introduzione

La teoria della probabilità ha avuto origine agli inizi del XVII secolo più che altro in relazione allo sviluppo di teorie sui giochi d'azzardo.

Nonostante il risultato di un'azione nei giochi d'azzardo (es.: il lancio di un dado) non sia deterministico e l'incertezza è tale che non è possibile scommettere con sicurezza sul suo esito, con una certa conoscenza del sistema che genera questi eventi (es.: bilanciamento o meno del dado) è possibile prevedere il comportamento nel lungo termine.

Esempio "testa o croce".

Definizione classica di probabilità

Prima della formalizzazione moderna (assiomatica), il concetto di probabilità è passato attraverso definizioni meno rigorose:

- Definizione classica
- Definizione frequentista

In base alla definizione classica:

Se un esperimento casuale può dar luogo ad N esiti che si escludono a vicenda e ugualmente possibili, se N è il numero possibile di esiti e N_A quello degli esiti che sono caratterizzati dall'attributo A di nostro interesse, allora la probabilità di A è data dal rapporto N_A /N.

Come si giustifica questa definizione? Es.: moneta. Definizione tautologica.

Esempio di applicazione della definizione classica

Esempio 1. Prendiamo il tipico esempio del lancio ripetuto di un dado. Il dado classico è un cubo perfettamente bilanciato con le sei facce numerate da 1 a 6. E’ possibile usare la definizione classica per calcolare la probabilità che esca, ad esempio:

- Una certa faccia (es.: il numero 4):
- Un numero pari:
- Un numero maggiore di 4:

Esempio di applicazione della definizione classica

Esempio 1. Prendiamo il tipico esempio del lancio ripetuto di un dado. Il dado classico è un cubo perfettamente bilanciato con le sei facce numerate da 1 a 6. E' possibile usare la definizione classica per calcolare la probabilità che esca, ad esempio:

- Una certa faccia (es.: il numero 4):
- Un numero pari:
- Un numero maggiore di 4:

Attenzione a come si contano gli eventi!

Esempio 2. Supponiamo che si chieda la probabilità che da due lanci consecutivi di una moneta escano fuori due "teste", la probabilità di questo evento è?

Proprietà a partire dalla definizione classica

Secondo la definizione classica, le probabilità che si ottengono sono dette anche “a priori” nel senso che vengono ricavate da un semplice ragionamento logico senza che fisicamente ci sia alcun lancio di monete o alcun esperimento.

Alcune proprietà emergono dalla definizione classica, e cioè:

La probabilità di un dato evento è sempre un numero compreso fra 0 e 1 (inclusi), dato che dipende dal rapporto N_A/N, e si possono verificare le 3 condizioni seguenti:

- $N_A = 0$ se l’evento non si verifica mai, e in questo caso la probabilità sarà 0
- $N_A = N$ se l’evento si verifica sempre, e in questo caso la probabilità sarà 1
- $N_A < N$ in generale, e la probabilità sarà un numero minore di 1.

Considerazioni a partire dalla definizione classica

La probabilità classica non risponde a tutta una serie di quesiti che possiamo incontrare nella vita reale.

Ad esempio, potremmo avere un caso in cui N è infinito (qual è la probabilità che un numero naturale sia pari?), o potremmo avere un dado truccato che è stato appesantito da un lato in modo che cadendo la probabilità che esca una faccia o l’altra non è uguale, ossia gli eventi non sono equiprobabili, o potrebbe essere che formuliamo quesiti che non sono contemplati (qual è la probabilità che un individuo sviluppi il diabete in età adulta?) e così via.

Per estendere a un dominio più ampio è stata introdotta la teoria frequentista.

Definizione frequentista

Dato un esperimento casuale ripetuto M volte, se un determinato evento A si verifica M_A volte, allora possiamo stimare la sua probabilità come il rapporto M_A/M.

Come si giustifica questa definizione?

Definizione frequentista

Dato un esperimento casuale ripetuto M volte, se un determinato evento A si verifica M_A volte, allora possiamo stimare la sua probabilità come il rapporto M_A/M.

Come si giustifica questa definizione?

Legge empirica del caso: ***in un grande numero di prove eseguite nelle medesime condizioni, la frequenza relativa di un evento casuale di probabilità costante in genere differisce di poco dalla probabilità dell'evento e l'approssimazione è tanto migliore quanto maggiore è il numero di prove eseguite.***

Cosa dice e cosa <u>non</u> dice la legge empirica del caso?

Considerazioni sulla teoria frequentista

Esempio. Con la teoria frequentista è possibile anche rispondere a domande come “qual è la probabilità che un bimbo nasca maschio a Cagliari”?

Considerazioni sulla teoria frequentista

In base alla definizione classica:

Se un esperimento <u>casuale</u> può dar luogo ad N esiti <u>che si escludono a vicenda</u> e <u>ugualmente possibili</u>, se N è il numero possibile di esiti e N_A quello degli esiti che sono caratterizzati dall'attributo A di nostro interesse, allora la probabilità di A è data dal rapporto N_A /N.

In base alla definizione frequentista:

Dato un esperimento casuale ripetuto M volte, se un determinato evento A si verifica M_A volte, allora possiamo stimare la sua probabilità come il rapporto M_A/M.

Il significato degli operandi è diverso! In entrambi i casi facciamo un rapporto ma **nel primo caso fra il numero di eventi possibili con un certo esito e il numero di eventi totali**, *nel secondo fra il numero di osservazioni sperimentali che hanno avuto un certo esito e il numero di osservazioni sperimentali effettuate*.

Considerazioni sulla teoria frequentista

In base alla definizione classica:

Se un esperimento casuale può dar luogo ad N esiti che si escludono a vicenda e ugualmente possibili, se N è il numero possibile di esiti e N_A quello degli esiti che sono caratterizzati dall'attributo A di nostro interesse, allora la probabilità di A è data dal rapporto N_A /N.

In base alla definizione frequentista:

Dato un esperimento casuale ripetuto M volte, se un determinato evento A si verifica M_A volte, allora possiamo stimare la sua probabilità come il rapporto M_A/M.

E' anche chiaro che al di là della definizione formale, nel caso frequentista il risultato è fortemente influenzato dalla numerosità del campione laddove l'esperimento abbia condizioni di esecuzione costanti e sia veramente casuale.

Definizione assiomatica di probabilità
Introduzione

Rispetto alle formulazioni tipiche dell'analisi matematica, quelle probabilistiche fin qui esposte mancano di rigore formale e per questo furono abbondantemente criticate.

Peraltro la teoria classica ha limiti evidenti già evidenziati ma anche la frequentista ha dei problemi di applicabilità.

La definizione assiomatica di probabilità, dovuta al matematico **Kolmogòrov**, non è semplice e immediata come quelle precedenti e per questo richiede alcune definizioni preliminari. Introduce una struttura formale che consente di arrivare molto più lontani rispetto alle semplici deduzioni della classica e della frequentista, peraltro senza specificare come sia possibile calcolare la probabilità di un evento, e quindi rimandando a queste implicitamente.

Verrà data per scontata la conoscenza delle proprietà elementari degli insiemi e delle funzioni.

Spazio campionario, campioni e eventi

Si definisce <u>spazio campionario</u> S (o “spazio dei campioni” o “spazio campione”) l’insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento casuale.

Il singolo esito di un esperimento è detto “punto campione” o semplicemente “campione” (ecco perché si parla di spazio campionario). Uno spazio campionario è *discreto* se possiede un numero finito di campioni numerabili, mentre è *continuo* in caso questo non sia vero.

Spazio campionario, campioni e eventi

Si definisce <u>spazio campionario</u> S (o “spazio dei campioni” o “spazio campione”) l’insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento casuale.

Il singolo esito di un esperimento è detto “punto campione” o semplicemente “campione” (ecco perché si parla di spazio campionario). Uno spazio campionario è *discreto* se possiede un numero finito di campioni numerabili, mentre è *continuo* in caso questo non sia vero.

Si definisce <u>evento</u> un sottoinsieme dello spazio campionario. La famiglia di tutti gli eventi associati ad un dato esperimento è definito “spazio degli eventi”.

Eventi elementari, certi e impossibili

Dal momento che l'evento è un sottoinsieme dello spazio campionario, più risultati (campioni) possono appartenere a un certo evento. Laddove però all'evento corrisponda un solo campione si parla di ***evento elementare***.

Ovviamente è possibile che un evento non si verifichi mai, e in questo caso l'evento stesso è un insieme vuoto, ossia non contiene alcun campione, e si dice ***evento impossibile***, oppure può essere che un evento si verifica sicuramente, ossia l'evento coincida con tutto lo spazio campionario S e si parla di ***evento certo*** (talora si indica direttamente con S l'evento certo).

Esempio

Esempio. Prendiamo in considerazione un esempio semplice, quello del lancio di un solo dado. Per me l'evento elementare (quello cioè al quale corrisponde un solo campione) è A_i=*{numero di pallini in alto}* ossia il numero di pallini che vedo sulla faccia superiore del dado. Evidentemente ogni insieme A_i è composto da un solo elemento, e abbiamo solo 6 di questi insiemi, e sono eventi elementari. Dal momento che questi sono anche tutti i possibili risultati del nostro esperimento, il nostro spazio campionario è composto da soli 6 elementi: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

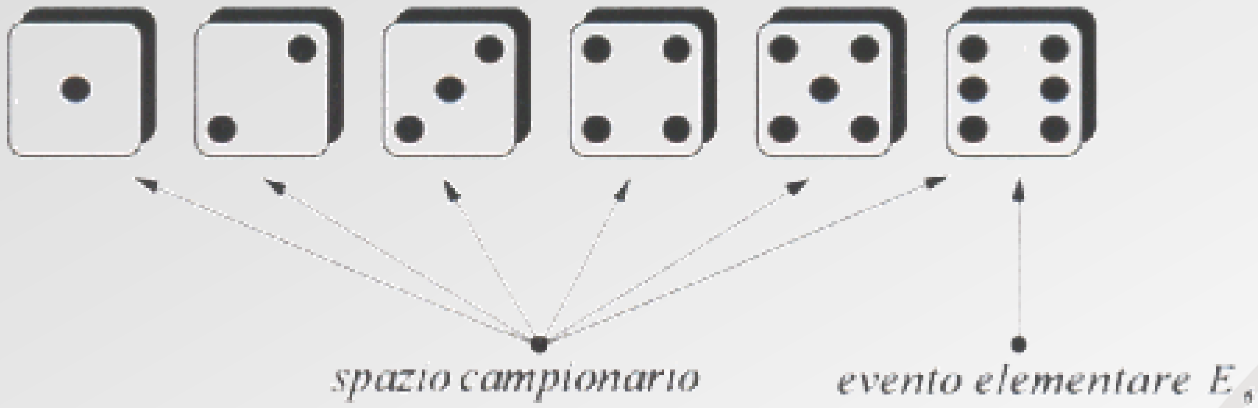
Esempio

Attenzione però che anche *B={numero pari di pallini in alto}* è un evento, che consta di 3 punti campione, ossia *B={2,4,6}*.

Esempio

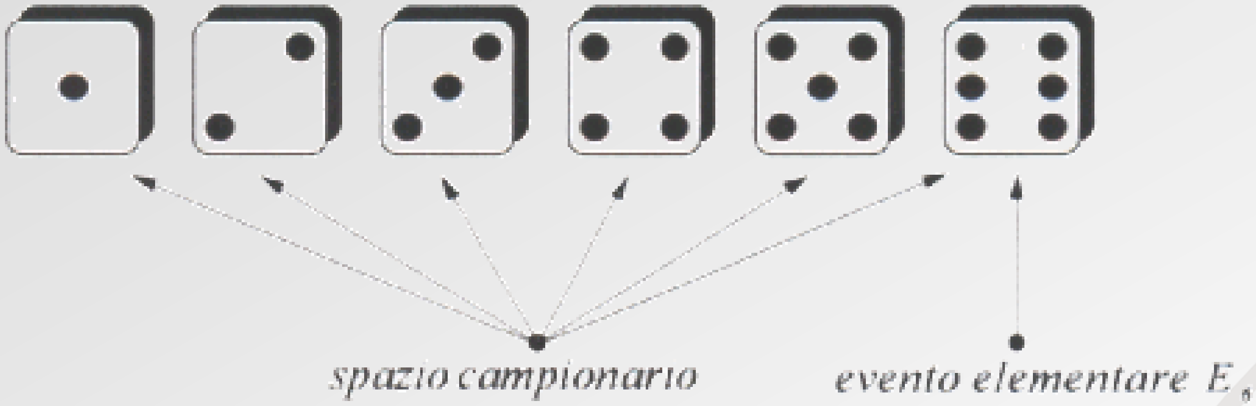
Anche l'evento *C={numero di pallini in alto >4}* è un evento che consta di 2 campioni *C={5,6}*.

Esempio



A partire da 6 punti campione, sapendo che tutti possono o meno essere parte di un evento, con il semplice calcolo combinatorio, possiamo dire che il numero possibile di eventi che possiamo immaginare per questo esperimento è pari a…

Esempio



A partire da 6 punti campione, sapendo che tutti possono o meno essere parte di un evento, con il semplice calcolo combinatorio, possiamo dire che il numero possibile di eventi che possiamo immaginare per questo esperimento è pari a…

<u>2^6=64, dei quali solo 6 sono elementari come abbiamo già avuto modo di dire.</u>

Esempio

Esempio. Si lanciano contemporaneamente 3 monete diverse e si osserva quale faccia appare in ognuna di esse. Quanti e quali sono i risultati di questo esperimento casuale?

Esempio

Esempio. Si lanciano contemporaneamente 3 monete diverse e si osserva quale faccia appare in ognuna di esse. Quanti e quali sono i risultati di questo esperimento casuale?

Consideriamo che in ogni terna la prima lettera rappresenta l'esito del lancio della prima moneta (T oppure C), la seconda della seconda e la terza della terza. Si consideri A_i=*{esattamente i teste}* con $i=0,1,2,3$. Per ogni i, A_i è un evento. Sono tutti eventi elementari?

Esempio

Esempio. Si lanciano contemporaneamente 3 monete diverse e si osserva quale faccia appare in ognuna di esse. Quanti e quali sono i risultati di questo esperimento casuale?

Consideriamo che in ogni terna la prima lettera rappresenta l'esito del lancio della prima moneta (T oppure C), la seconda della seconda e la terza della terza. Si consideri A_i=*{esattamente i teste}* con $i=0,1,2,3$. Per ogni i, A_i è un evento. Sono tutti eventi elementari?

Esempio

Esempio. Si lanciano contemporaneamente 3 monete diverse e si osserva quale faccia appare in ognuna di esse. Quanti e quali sono i risultati di questo esperimento casuale?

Consideriamo che in ogni terna la prima lettera rappresenta l'esito del lancio della prima moneta (T oppure C), la seconda della seconda e la terza della terza. Si consideri A_i=*{esattamente i teste}* con *i=0,1,2,3*. Per ogni *i*, A_i è un evento. Sono tutti eventi elementari?

Quanti eventi possibili ci sono? $2^8 = 256$

Eventi come insiemi

Dal momento che gli eventi sono insiemi, possiamo anche usare le proprietà degli insiemi per definire nuovi eventi.

Per esempio nel caso del lancio del dado, abbiamo un evento A_1=*{numero pari di pallini in alto}* e un evento A_2=*{numero di pallini in alto multiplo di 3}*.

Possiamo anche definire un nuovo evento tipo "esce un numero pari e multiplo di 3" che non è altro che l'intersezione fra i due insiemi (il numero deve essere sì pari, ma deve essere anche multiplo di 3), e possiamo definire un evento tipo "esce un numero pari o un multiplo di 3" che non è altro che l'unione dei due insiemi. Quali sono questi insiemi?

Data un'*algebra* di eventi…

…ossia una collezione di eventi che rispetta le seguenti proprietà:

- $S \in \Delta$ (dove Δ è l'insieme di tutti gli eventi possibili per un dato esperimento casuale)
- Se $A \in \Delta$ allora $\bar{A} \in \Delta$
- Se $A_1, A_2 \in \Delta$ allora $A_1 \cup A_2 \in \Delta$

Allora…

…si definisce la funzione di probabilità (definizione assiomatica)

Una funzione di probabilità P[·] è una funzione avente come dominio un'algebra di eventi Δ e come codominio l'intervallo [0,1], che in più soddisfa le seguenti proprietà:

- ***Per ogni evento A $\in \Delta$ la probabilità che questo si verifichi è sempre maggiore o uguale a zero, ossia***

$$\boldsymbol{P}[A] \geq 0$$

- ***La probabilità dell'evento certo è uguale a 1, ossia***

$$\boldsymbol{P}[S] = 1$$

- ***Se A_1 e A_2 sono eventi mutuamente esclusivi, allora la probabilità che si verifichi o l'uno o l'altro dei due eventi o entrambi è la somma delle probabilità che si verifichino separatamente A_1 o A_2, ossia .***

$$\boldsymbol{P}[A_1 \cup A_2] = \boldsymbol{P}[A_1] + \boldsymbol{P}[A_2]$$

Questo è generalizzabile a una successione di più di due eventi a due a due mutuamente esclusivi.

Considerazioni e proprietà

La definizione assiomatica non ci dice *come* possiamo calcolare le probabilità, mentre le altre due definizioni ci aiutavano in questo. Dovremo perciò comunque costruire *un modello* del nostro esperimento casuale se vogliamo ottenere dei valori da attribuire alla probabilità degli eventi.

Esistono una serie di proprietà che discendono dalla definizione assiomatica e sono teoremi dimostrabili, come per esempio:

- La probabilità dell'evento impossibile è 0
- Se A è un evento in Δ allora $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$
- Presi due eventi A_1 e A_2, $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 A_2]$
- Se A_1 e A_2 sono due eventi di Δ e $A_1 \subset A_2$, allora $P[A_1] \leq P[A_2]$

Considerazioni e proprietà

La definizione assiomatica non ci dice *come* possiamo calcolare le probabilità, mentre le altre due definizioni ci aiutavano in questo. Dovremo perciò comunque costruire *un modello* del nostro esperimento casuale se vogliamo ottenere dei valori da attribuire alla probabilità degli eventi.

Esistono una serie di proprietà che discendono dalla definizione assiomatica e sono teoremi dimostrabili, come per esempio:

- La probabilità dell'evento impossibile è 0
- Se A è un evento in Δ allora $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$
- Presi due eventi A_1 e A_2, $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 A_2]$
- Se A_1 e A_2 sono due eventi di Δ e $A_1 \subset A_2$, allora $P[A_1] \leq P[A_2]$

Esempio

Se due eventi sono mutuamente esclusivi significa che l'intersezione dei due insiemi è vuota, se non lo sono no.

Consideriamo i seguenti eventi:

A. Il paziente è diabetico
B. Il paziente è cardiopatico
C. Il paziente è diabetico o cardiopatico
D. Il paziente è diabetico e cardiopatico

Disegnare gli eventi come insiemi.

Esempio

Se due eventi sono mutuamente esclusivi significa che l'intersezione dei due insiemi è vuota, se non lo sono no.

Consideriamo i seguenti eventi:

A. Il paziente è diabetico
B. Il paziente è cardiopatico
C. Il paziente è diabetico o cardiopatico
D. Il paziente è diabetico e cardiopatico

Disegnare gli eventi come insiemi.

Valutiamo la terza proprietà di prima: $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 A_2]$

Proprietà additiva

Dall'esempio appena mostrato, che giustifica la terza proprietà ossia:

Presi due eventi A_1 e A_2, $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 A_2]$

Se i due eventi A e B fossero incompatibili (o mutuamente esclusivi), vorrebbe dire che o si verifica l'uno o si verifica l'altro, ossia l'intersezione fra i due insiemi è vuota come abbiamo già detto.

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 A_2]$$

In tal caso la proprietà appena esposta perderebbe il terzo termine, perché:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

può essere riscritta come:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

e il terzo termine è zero per eventi incompatibili. Quindi la proprietà additiva dice che dati due eventi A e B incompatibili:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Spazi campionari finiti con campioni equiprobabili

Se lo spazio campionario è finito, ossia il numero di possibili esiti di un esperimento è limitato, è abbastanza semplice calcolare la probabilità. Vediamo cosa succede se gli esiti di un esperimento sono **equiprobabili** (quindi va bene la teoria classica).

Dato uno spazio campionario S composto da N punti campione, o eventi elementari, a_1, a_2, …, a_N, la funzione di probabilità $P[\cdot]$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- ***$P[a_1]=P[a_2]=\ldots=P[a_N]$***
- ***se A è un sottoinsieme di S che contiene N_A punti campione, allora $P[A]= N_A/N$***

è definita funzione di probabilità uniforme.

Esempio

Consideriamo il lancio di due dadi. In questo caso lo spazio campionario è formato da tutte le possibili coppie di numeri che si ottengono sul primo dado e sul secondo dado, ordinatamente. Quant'è grande lo spazio campionario? Qual è la probabilità di ogni punto dello spazio campionario? Sulla base del calcolo di prima, qual è la probabilità che la somma dei risultati sui singoli dadi sia 7?

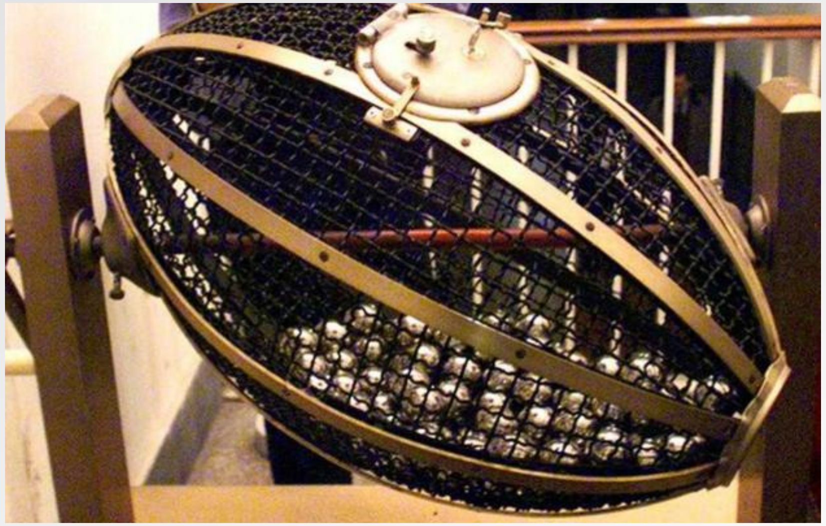
36

1/36

1/6

Esempio

Nel gioco del lotto, è presente un’urna con 90 sfere metalliche che internamente contengono un numero (da 1 a 90 appunto). Per ogni ruota vengono estratti 5 numeri, ovvero vengono estratte in sequenza 5 sfere dall’urna, senza rimetterle dentro perché non possono verificarsi doppioni sulla stessa ruota. Quanto è grande lo spazio campionario in questo caso?



Spazi campionari finiti con campioni non equiprobabili

Nel caso i campioni non siano equiprobabili è impossibile usare la teoria classica, mentre la frequentista non lo è ma richiede una sperimentazione reale. La definizione assiomatica ci consente comunque di operare.

Possiamo conoscere la probabilità di ognuno dei possibili eventi nel nostro spazio degli eventi a partire dagli N eventi elementari a_j, con j = 1,2,…,N. Dalla definizione possiamo dire che se gli <u>eventi elementari</u> sono fra loro mutuamente esclusivi:

$$1 = P[S] = P\left[\bigcup_{j=1}^{N}\{a_j\}\right] = \sum_{j=1}^{N} P[\{a_j\}] = \sum_{j=0}^{N} p_j$$

Ne conseguirà che preso un evento qualsiasi A che consta di un certo numero di campioni (che sono eventi elementari), la probabilità di quell'evento è semplicemente la sommatoria delle p_j estesa a quei campioni a_j che appartengono all'evento A. Si dimostra che questa funzione di probabilità così costruita rispetta la definizione assiomatica.

Introduzione alle probabilità condizionate

Finora abbiamo parlato di probabilità *incondizionate*, ossia di probabilità valutate assumendo che non vi fosse nulla che potesse influenzare la valutazione al di là delle condizioni comuni di esperimento. Tali probabilità sono anche definite "a priori"

Tuttavia in molti casi non è così. Ad esempio, è vero che potremmo voler calcolare la probabilità che un evento si verifichi, ma potremmo anche poter essere interessati a calcolare la probabilità che un determinato evento si verifichi *dato che un altro evento si è verificato*.

In questi casi si parla di **probabilità condizionata**, o ***probabilità a posteriori.***

Un esempio è: “qual è la probabilità che vengano estratte due palle nere da un’urna che contiene palle nere e rosse, sapendo che la prima palla estratta è nera?”.

Probabilità condizionata

Siano A e B due eventi nello spazio degli eventi Δ di un determinato esperimento casuale. La probabilità condizionata dell'evento A essendosi verificato l'evento B, indicata come P[A|B], è definita come:

$$\boldsymbol{P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]}}$$

se P[B]>0, dove con P[AB] si intende ovviamente la possibilità che si siano verificati entrambi gli eventi, ossia P[A∩B].

La definizione è molto intuitiva: dal momento che l'evento che si è già verificato è B, allora la probabilità che si verifichi anche A successivamente è la parte di probabilità che si verifichino entrambe rapportata a tutti i casi nei quali si verifica B in generale (che include anche il caso in cui poi A non si verifica affatto).

Considerazioni sulla probabilità condizionata

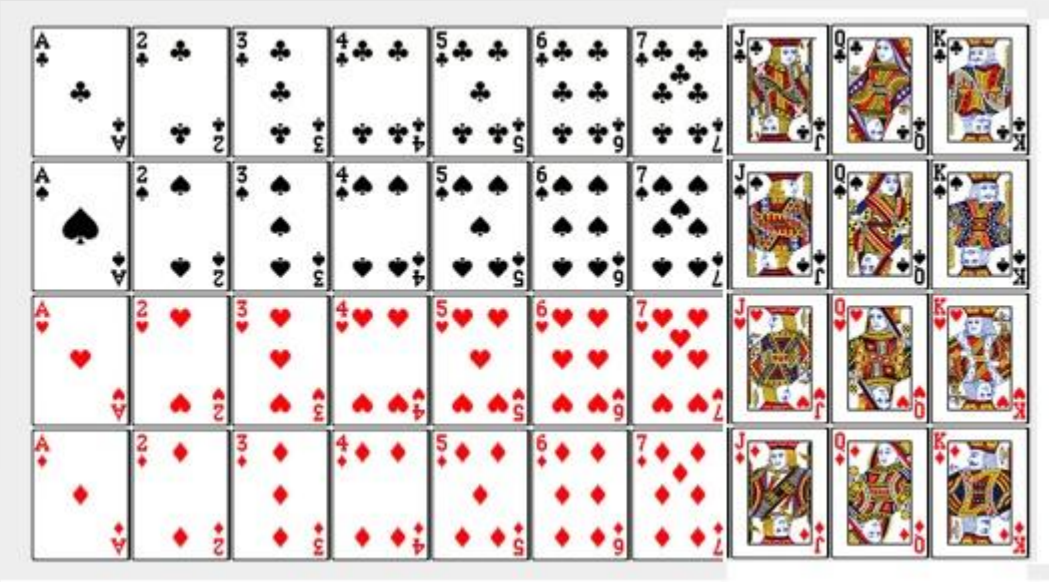
La formula trova accordo (per probabilità uniforme) con la teoria frequentista, che anzi la giustifica. Infatti se facciamo un gran numero di realizzazioni di un certo esperimento casuale per il quale A e B sono definiti, allora $P[A|B]$ rappresenta la proporzione di realizzazioni nelle quali si è verificato A quando prima si era verificato B.

Possiamo anche notare che quando parliamo di probabilità condizionata, condizioniamo che si verifichi un certo evento A al fatto che prima se ne sia verificato uno B, per cui in pratica è come se B diventasse (ai fini della nostra analisi) il nuovo spazio campionario di interesse. In questo modo è anche possibile calcolare la probabilità condizionata in maniera diretta.

Come al solito chiariamoci le idee con un bell’esempio…

Esempio

Consideriamo un mazzo da 40 carte, metà rosse e metà nere (ovviamente) che contiene 3 figure per seme. Estraiamo una carta a caso dal mazzo e ci dicono che è una carta nera. Qual è la probabilità che sia una figura?



Probabilità composte

Dalla definizione di probabilità condizionata deriva anche il cosiddetto teorema delle **probabilità composte** (della teoria classica), che non è altro che la riscrittura della formula eliminando la frazione, ossia:

$$P[AB] = P[A]P[B|A] = P[B]P[A|B]$$

Questa forma è molto usata per lo sviluppo delle ultime formule che vedremo.

Eventi indipendenti

Si dice che due eventi A e B sono indipendenti se il fatto che si verifichi uno dei due non altera la probabilità che si verifichi l'altro.

Una definizione un po' più "matematica" è la seguente.

Si dice che due eventi A e B sono indipendenti se e solo se viene verificata una qualsiasi delle seguenti relazioni:

I. $P[A|B] = P[A]$ ***se*** $P[B]>0$

II. $P[B|A] = P[B]$ ***se*** $P[A]>0$

III. $P[AB] = P[A]P[B]$

Le prime due discendono direttamente dalla definizione. L'ultima si ricava semplicemente dalle prime due unitamente alla formula delle probabilità composte.

Eventi indipendenti

Si dice che due eventi A e B sono indipendenti se e solo se viene verificata una qualsiasi delle seguenti relazioni:

I. P[A|B] = P[A] se P[B]>0

II. P[B|A] = P[B] se P[A]>0

III. P[AB] = P[A]P[B]

Laddove gli eventi siano più di 2 la definizione può essere estesa. Prendendo la relazione III, risulterà immediato capire perché si dice che gli eventi A_i con $i = 1, \dots, N$ sono indipendenti se e solo se:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right] = \prod_{i=1}^{N} P[A_i]$$

Teorema della probabilità assoluta o delle probabilità totali

Si consideri uno spazio degli eventi completamente "ricoperto" di eventi B_j mutuamente esclusivi, quindi presi due B_j l'intersezione fra loro è l'insieme vuoto, e inoltre:

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

e si consideri un qualsiasi evento A nello stesso spazio degli eventi che si possa verificare eventualmente in corrispondenza di uno o più eventi B_j, per il quale:

$$P[A \cap B_j] = P[B_j] P[A|B_j]$$

Sapendo che i Bj sono incompatibili fra loro:

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \cdots + P[A \cap B_n]$$

$$\boldsymbol{P[A] = \sum_{j=1}^{n} P[B_j] P[A|B_j]}$$

Questo teorema è particolarmente utile si possano avere diverse cause, fra loro mutuamente esclusive, che possano portare ad un medesimo effetto, e interessa la probabilità che l'effetto osservato. Come al solito vediamo un esempio.

Esempio probabilità assoluta

Esempio. Prendiamo 5 urne:

- 2 urne hanno la composizione B_1 che consta in 2 palline bianche e una nera (per ogni urna)
- 1 urna ha una composizione B_2 che consta di 10 palline nere
- 2 urne hanno una composizione B_3 che consta di 3 palline bianche e una nera (per ogni urna)

Si sceglie a caso un'urna e da questa si estrae a caso una pallina. Qual è la probabilità che questa sia bianca?

$$\boldsymbol{P[A] = \sum_{j=1}^{n} P[B_j]P[A|B_j]}$$

Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes lavora al contrario rispetto a quanto fa la probabilità assoluta, ossia mentre la seconda ci serve per dire qual è la probabilità che si verifichi un certo evento (probabilità dell'effetto finale), il teorema di Bayes ci serve per dire qual è la probabilità che una prima fase dell’esperimento abbia avuto un determinato esito dato che alla fine si è verificato un certo evento (probabilità della causa di un determinato evento).

Nelle medesime ipotesi del teorema precedente si dimostra che:

$$\boldsymbol{P[B_k|A] = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{\sum_{j=1}^{n} P[B_j]P[A|B_j]}}$$

La dimostrazione è abbastanza semplice.

Esempio teorema di Bayes

Prendiamo 5 urne:

- 2 urne hanno la composizione B_1 che consta in 2 palline bianche e una nera per ogni urna
- 1 urna ha una composizione B_2 che consta di 10 palline nere
- 2 urne hanno una composizione B_3 che consta di 3 palline bianche e una nera per urna

Si sceglie una pallina da un'urna a caso. La pallina è bianca. Ci si chiede: qual è la probabilità che sia stata estratta dall'urna con la composizione B1?

$$P[B_k|A] = \frac{P[A|B_k]P[B_k]}{\sum_{j=1}^{n} P[B_j]P[A|B_j]}$$

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Domande?

Corso integrato di Fondamenti di Ingegneria dell'informazione

Modulo di Elementi di analisi dei segnali biomedici

Prof. Danilo Pani

MeDSP
Medical Devices and Signal Processing Lab