

Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso Integrato di Scienza e Tecnica delle Costruzioni

Modulo di **Tecnica delle Costruzioni**

A.A. 2025-2026
2° semestre

CFU 8

Docente

Marco Zucca

ESEMPI APPLICATIVI SUI COEFFICIENTI DI FLESSIBILITA' E DI RIGIDEZZA



POLITECNICO

MILANO 1863

Scuola Master Fratelli Pesenti



Università degli Studi di Cagliari

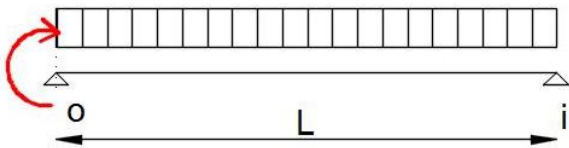
DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E ARCHITETTURA

SINTESI SCHEMATICA DEI COEFFICIENTI DI FLESSIBILITA' E RIGIDEZZA

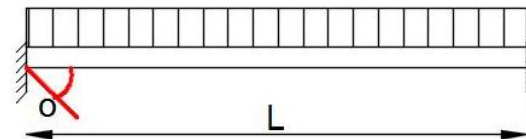
$$\alpha_{oi} = \frac{1}{3} L/EJ \quad \beta_{io} = -\frac{1}{6} L/EJ$$

$$\phi^{\circ}_{oi} = \frac{1}{24} q L^3/EJ \quad \phi^{\circ}_{io} = -\frac{1}{24} q L^3/EJ$$



Coeff. di Rigidezza: $U_{oi} = 3 EJ/L$

$$\mu_{oi} = -\frac{1}{12} q L^2 \quad \mu_{io} = \frac{1}{12} q L^2$$

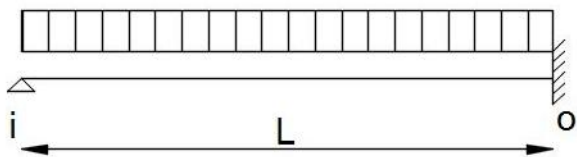


$$M_{oi} = W_{oi}\phi_o + V_{oi}\phi_i - S_{oi}\psi_{oi} + \mu_{oi}$$

$W_{oi} = 4 EJ/L$ $V_{oi} = 2 EJ/L$ $S_{oi} = 6 EJ/L$

$$U_{oi} = 3 EJ/L$$

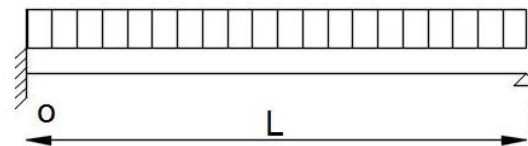
$$\mu^*_{oi} = \frac{1}{8} q L^2$$



$$M_{oi} = U_{oi}\phi_o - U_{oi}\psi_{oi} + \mu^*_{oi}$$

$$U_{oi} = 3 EJ/L$$

$$\mu^*_{oi} = -\frac{1}{8} q L^2$$



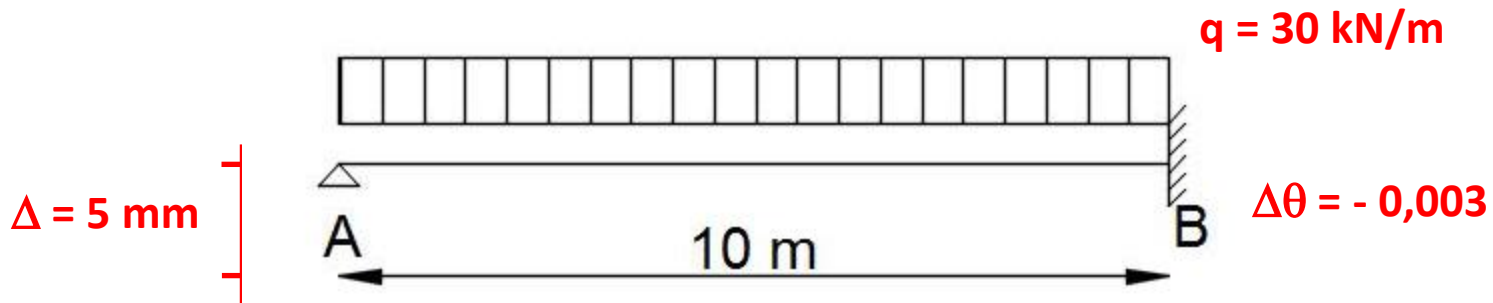
$$M_{oi} = U_{oi}\phi_o - U_{oi}\psi_{oi} + \mu^*_{oi}$$

Se è anche applicato un momento nell'appoggio i

$$M_{oi} = U_{oi}\phi_o - U_{oi}\psi_{oi} + \mu^*_{oi} - (\beta_{oi}/\alpha_{oi}) m_i$$

ESEMPIO N. 1

Dopo aver determinato il momento iperstatico M_B , valutare le reazioni in A e B, il Momento flettente e il Taglio



Dati: $q = 30 \text{ kN/m}$, sezione $b = 40 \text{ cm}$ e $h = 80 \text{ cm}$, la struttura è in calcestruzzo armato $E_c = 30.000.000 \text{ kN/m}^2$, in B è applicata una distorsione $\Delta\theta = -0,003$ radianti e l'appoggio A ha un cedimento di 5 mm.

ESEMPIO N. 1

Lavoro preparatorio:

$$J = 0,40 \times 0,80^3 / 12 = 0,01707 \text{ m}^4$$

$$EJ/L = 51200 \text{ kNm}$$

Coefficiente di rigidezza $U_{BA} = 153600 \text{ kNm}$

Momento di incastro perfetto $\mu^*_{BA} = 1/8 qL^2 = 375 \text{ kNm}$

Per effetto del cedimento dell'appoggio A l'asta ruota negativamente in senso anti orario della quantità

$$\psi = -0,005/10 = -0,0005 \text{ radianti}$$

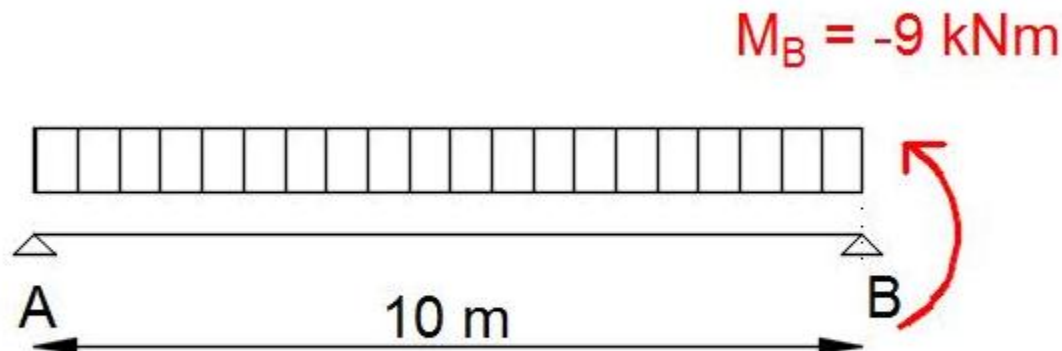
ESEMPIO N. 1

Per valutare il momento iperstatico in B

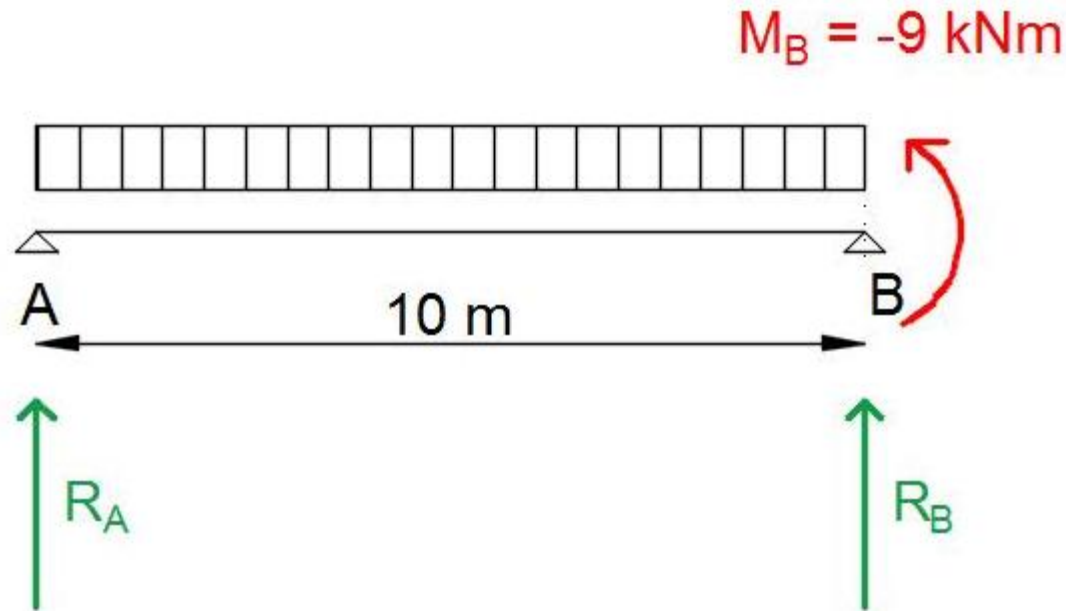
$$M_{oi} = U_{oi}\varphi_o - U_{oi}\psi_{oi} + \mu^*_{oi}$$

$$M_B = 153600 \times (-0,003) - 153600 \times (-0,0005) + 375 = -9 \text{ kNm}$$

Per valutare le reazioni in A e B dobbiamo considerare la struttura isostatica associata nella quale agisce oltre al carico ripartito anche il momento iperstatico.



ESEMPIO N. 1



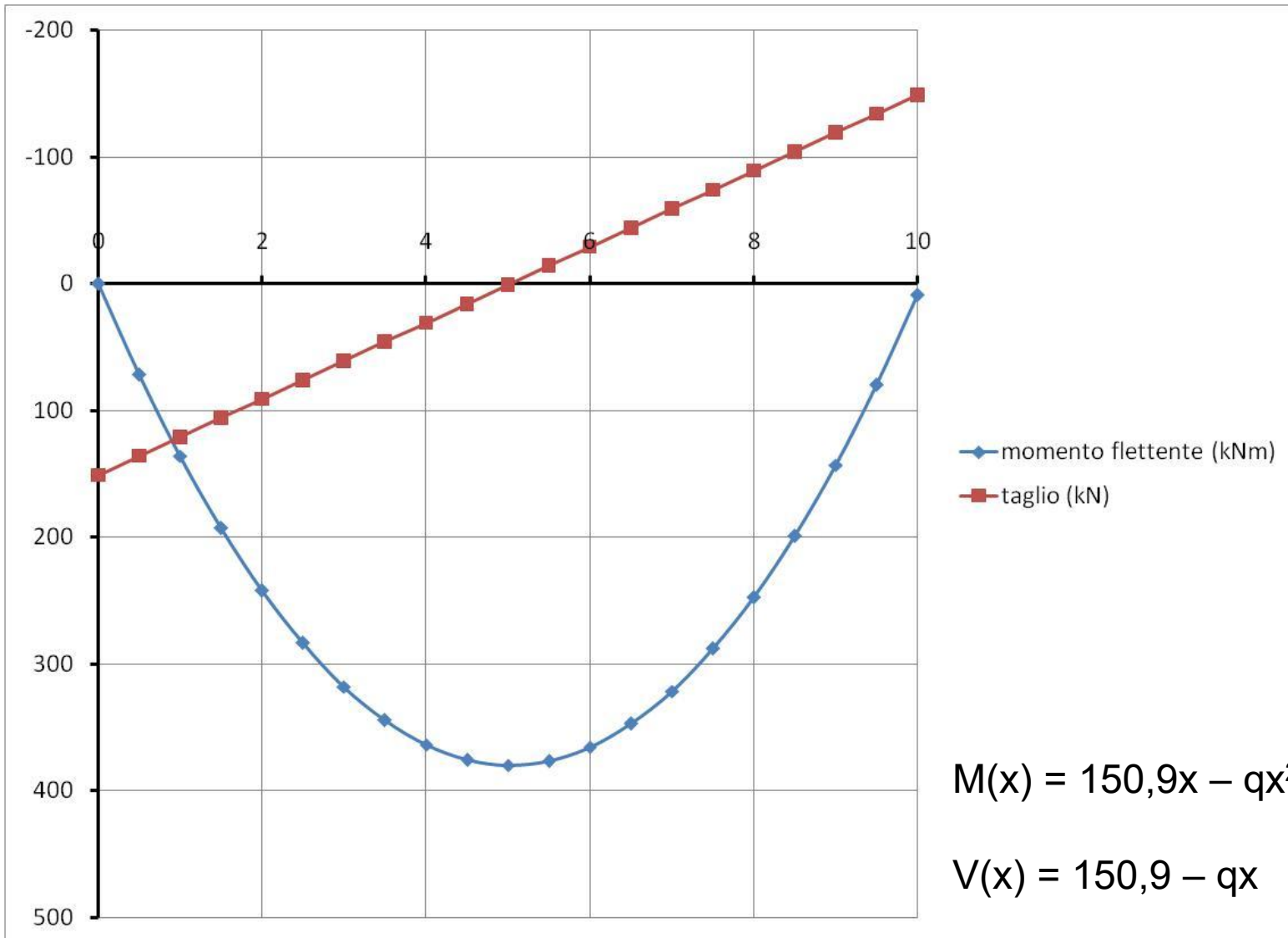
L'assenza di carichi orizzontali produce solo reazioni verticali. Per determinarle imporranno l'equilibrio alla rotazione rispetto a B:

$$R_A \times 10 - 30 \times 10^2 / 2 - 9 = 0$$

$$R_A = 150,9 \text{ kN}$$

$$R_B = 30 \times 10 - R_A = 149,1 \text{ kN}$$

ESEMPIO N. 1



ESEMPIO N. 1

VALUTAZIONE DELLE ROTAZIONI DELLE ESTREMITA'

Lavoro preparatorio:

Determinazione dei coefficienti di flessibilità α e β

$$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 6,51 \cdot 10^{-6} \text{ radianti}$$

$$\beta = -1/6 \cdot L/EJ = -3,26 \cdot 10^{-6} \text{ radianti}$$

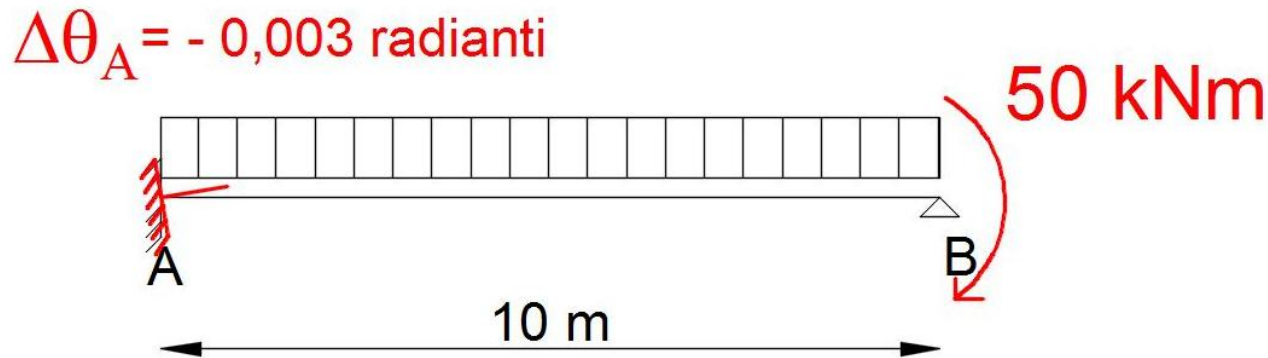
DETERMINAZIONE DELLE ROTAZIONI IN A e IN B espresse in radianti

$$\text{ROT A} = q L^3/(24 EJ) + \beta_{AB} M_B = 0,00244 + (-3,26 \cdot 10^{-6}) (-9) = 0,00247$$

$$\text{ROT B} = -q L^3/(24 EJ) + \alpha_{BA} M_B = -0,00244 + (6,51 \cdot 10^{-6}) (-9) = -0.0025$$

ESEMPIO N. 2

Dopo aver determinato il momento iperstatico M_A , valutare le reazioni in A e B, il Momento flettente e il Taglio



Dati: $q = 30$ kN/m, sezione $b = 40$ cm e $h = 80$ cm, la struttura è in calcestruzzo armato $E_c = 30000000$ kN/m², in A è applicata una distorsione $\Delta\theta = -0,003$ radianti e nell'appoggio B è applicata una coppia positiva di 50 kNm.

ESEMPIO N. 2

Lavoro preparatorio:

$$J = 0,40 \times 0,80^3 / 12 = 0,01707 \text{ m}^4$$

$$EJ/L = 51200 \text{ kNm}$$

Coefficiente di rigidezza

$$U_{AB} = 153600 \text{ kNm}$$

Momento di incastro perfetto in A

$$\mu^*_{AB} = -375 \text{ kNm}$$

Momento di incastro prodotto dalla coppia da 50 kNm agente in

$$B = -\beta/\alpha 50 = 25 \text{ kNm}$$

$$\alpha = 6,51 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta = -3,26 \cdot 10^{-6}$$

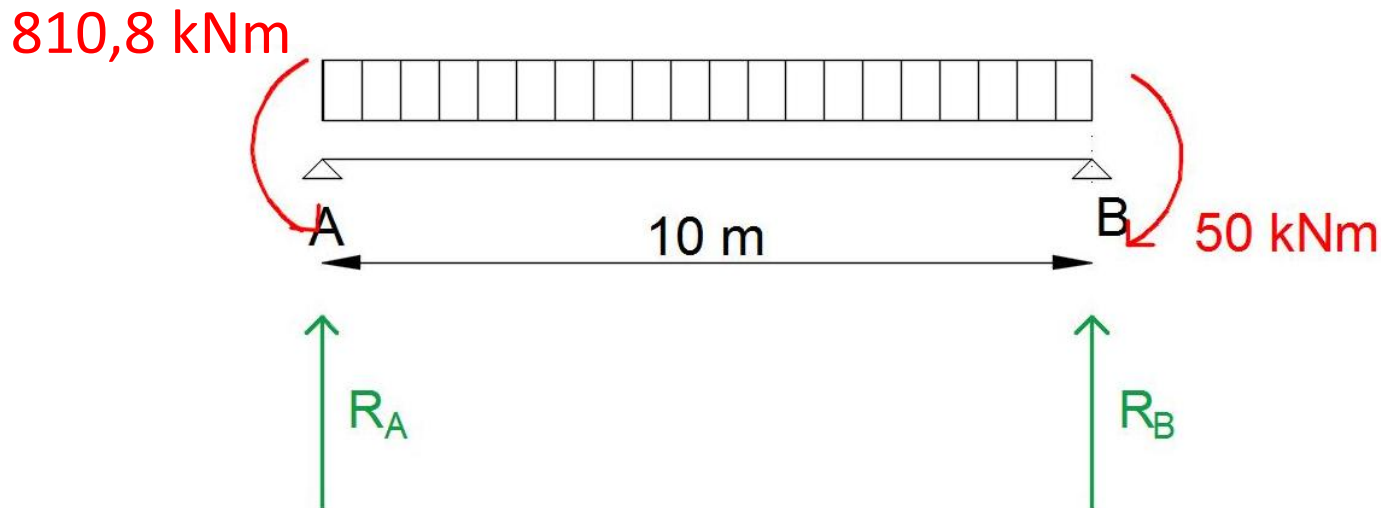
ESEMPIO N. 2

Per valutare il momento iperstatico in A

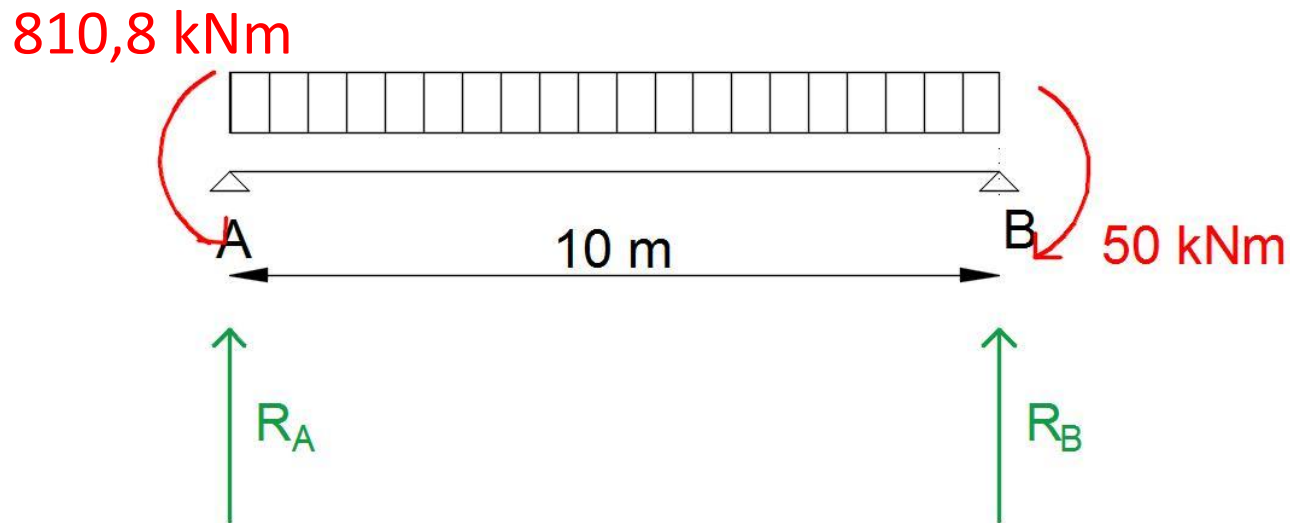
$$M_{oi} = U_{oi} \varphi_o - U_{oi} \psi_{oi} + \mu^*_{oi} - (\beta_{oi}/\alpha_{oi}) m_i$$

$$M_A = 153600 \times (-0,003) - 375 + 0.5 \times 50 = -810,8 \text{ kNm}$$

Per valutare le reazioni in A e B dobbiamo considerare la struttura isostatica associata nella quale agisce oltre al carico ripartito e al momento in B anche il momento iperstatico M_A .



ESEMPIO N. 2



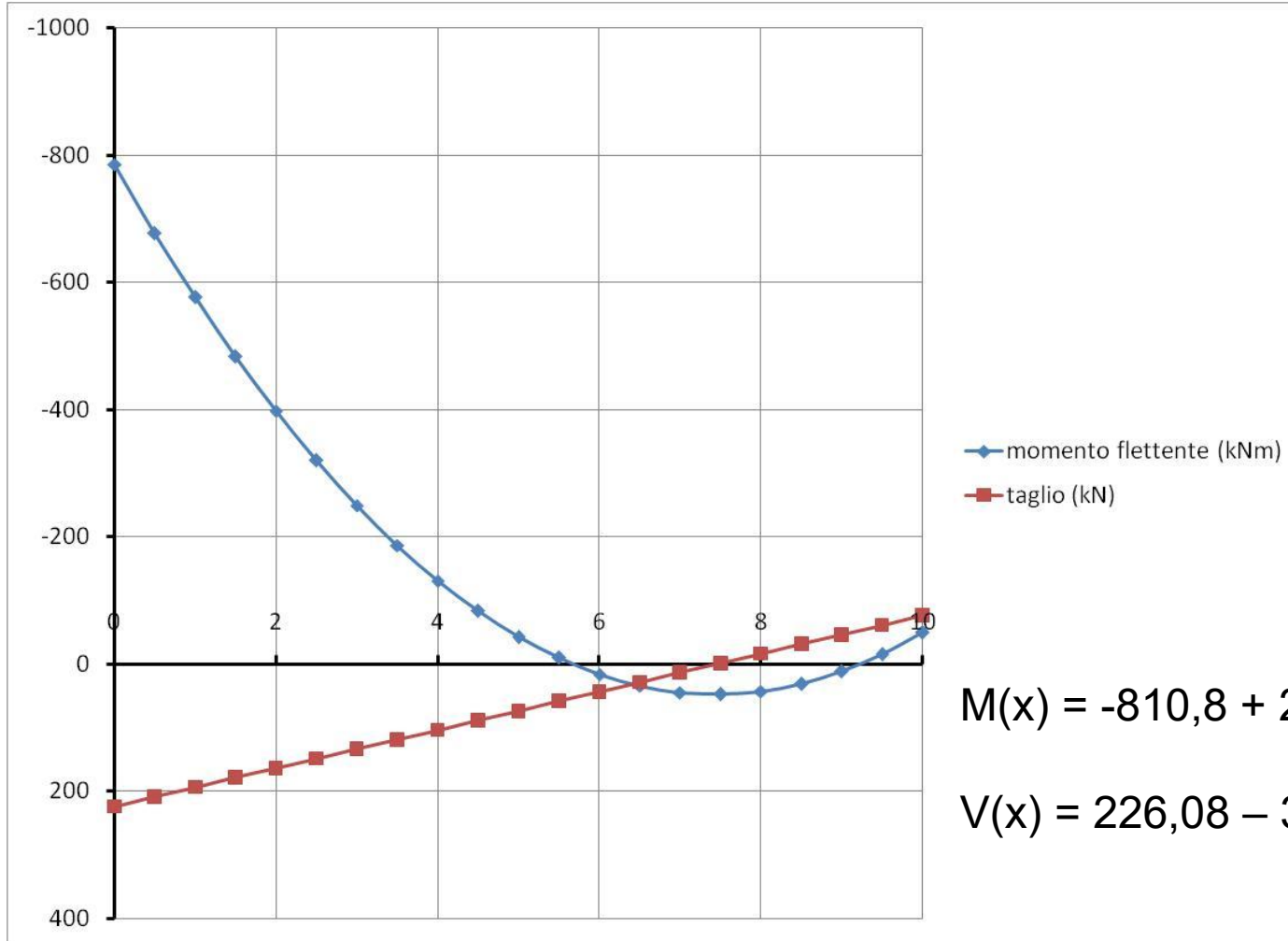
L'assenza di carichi orizzontali produce solo reazioni verticali. Per determinarle imporranno l'equilibrio alla rotazione rispetto a B:

$$R_A \times 10 - 810,8 - 30 \times 10^2 / 2 + 50 = 0$$

$$R_A = 226,08 \text{ kN}$$

$$R_B = 30 \times 10 - R_A = 73,92 \text{ kN}$$

ESEMPIO N. 2



$$M(x) = -810,8 + 226,08x - 30x^2/2$$

$$V(x) = 226,08 - 30x$$

ESEMPIO N. 2

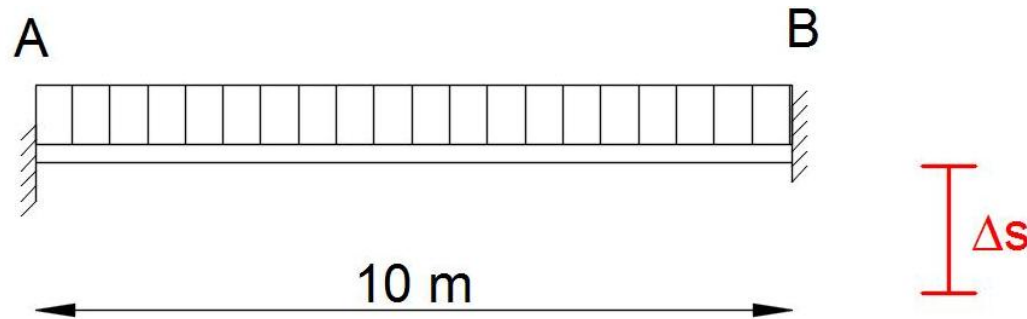
DETERMINAZIONE DELLE ROTAZIONI IN A e IN B espresse in radianti

$$\text{ROT A} = q L^3 / (24 EJ) + \alpha_{AB} M_A + \beta_{AB} M_B = 0,00244 + (6,51 \cdot 10^{-6}) (-810,08 + (-3,26 \cdot 10^{-6}) 50 = -0,003$$

$$\text{ROT B} = -q L^3 / (24 EJ) + \alpha_{BA} M_B + \beta_{BA} M_A = -0,00244 + (6,51 \cdot 10^{-6}) 50 + (-3,26 \cdot 10^{-6}) (-810,08) = 0,000523$$

ESEMPIO N. 3

Dopo aver determinato i momenti iperstatici M_A e M_B , valutare le reazioni in A e B, il Momento flettente e il Taglio



Dati: $q = 30 \text{ kN/m}$, sezione $b = 40 \text{ cm}$ e $h = 80 \text{ cm}$, la struttura è in calcestruzzo armato $E_c = 30000000 \text{ kN/m}^2$, l'incastro B ha un cedimento di 5 mm.

ESEMPIO N. 3

Lavoro preparatorio:

$$J = 0,40 \times 0,80^3 / 12 = 0,01707 \text{ m}^4$$

$$EJ/L = 51200 \text{ kNm}$$

Coefficienti di rigidezza

$$W = 204800 \text{ kNm}$$

$$V = 102400 \text{ kNm}$$

$$S = 307200 \text{ kNm}$$

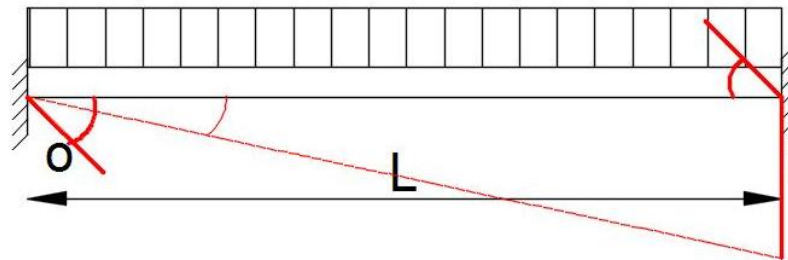
Momento di incastro perfetto $\mu_{AB} = -\mu_{BA} = -250 \text{ kNm}$

Per effetto del cedimento dell'incastro B l'asta ruota positivamente in senso orario della quantità

$$\psi = 0,005/10 = 0,0005 \text{ radianti}$$

ESEMPIO N. 3

Per valutare i momenti iperstatici in A e B



$$M_{oi} = W_{oi} \varphi_0 + V_{oi} \varphi_i - S_{oi} \psi_{oi} + \mu_{oi}$$

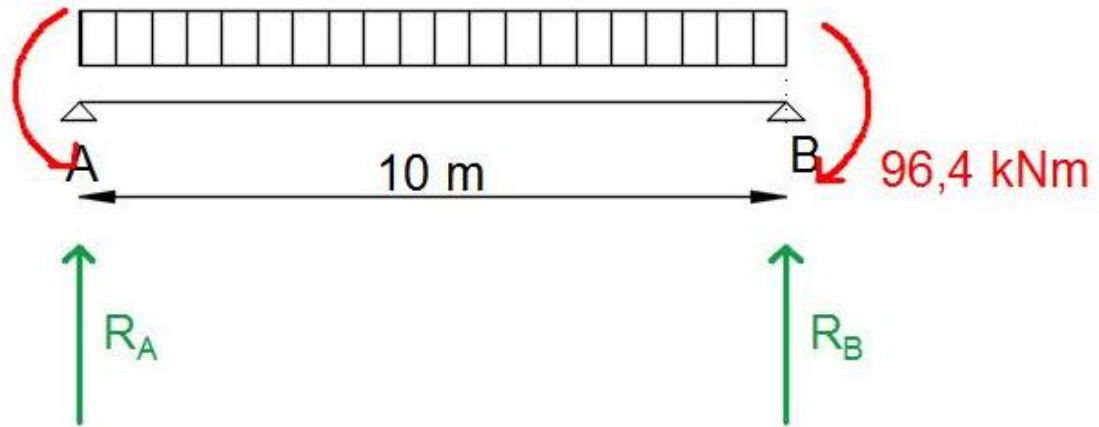
$$M_A = -S \psi + \mu_{AB} = -307200 \cdot 0,005 + (-250) = -403,6 \text{ kNm}$$

$$M_B = -S \psi + \mu_{BA} = -307200 \cdot 0,005 + 250 = 96,4 \text{ kNm}$$

ESEMPIO N. 3

Per valutare le reazioni in A e B dobbiamo considerare la struttura isostatica associata nella quale agiscono, oltre al carico ripartito, i momenti iperstatici M_A e M_B .

$$M_A = 403,6 \text{ kNm}$$



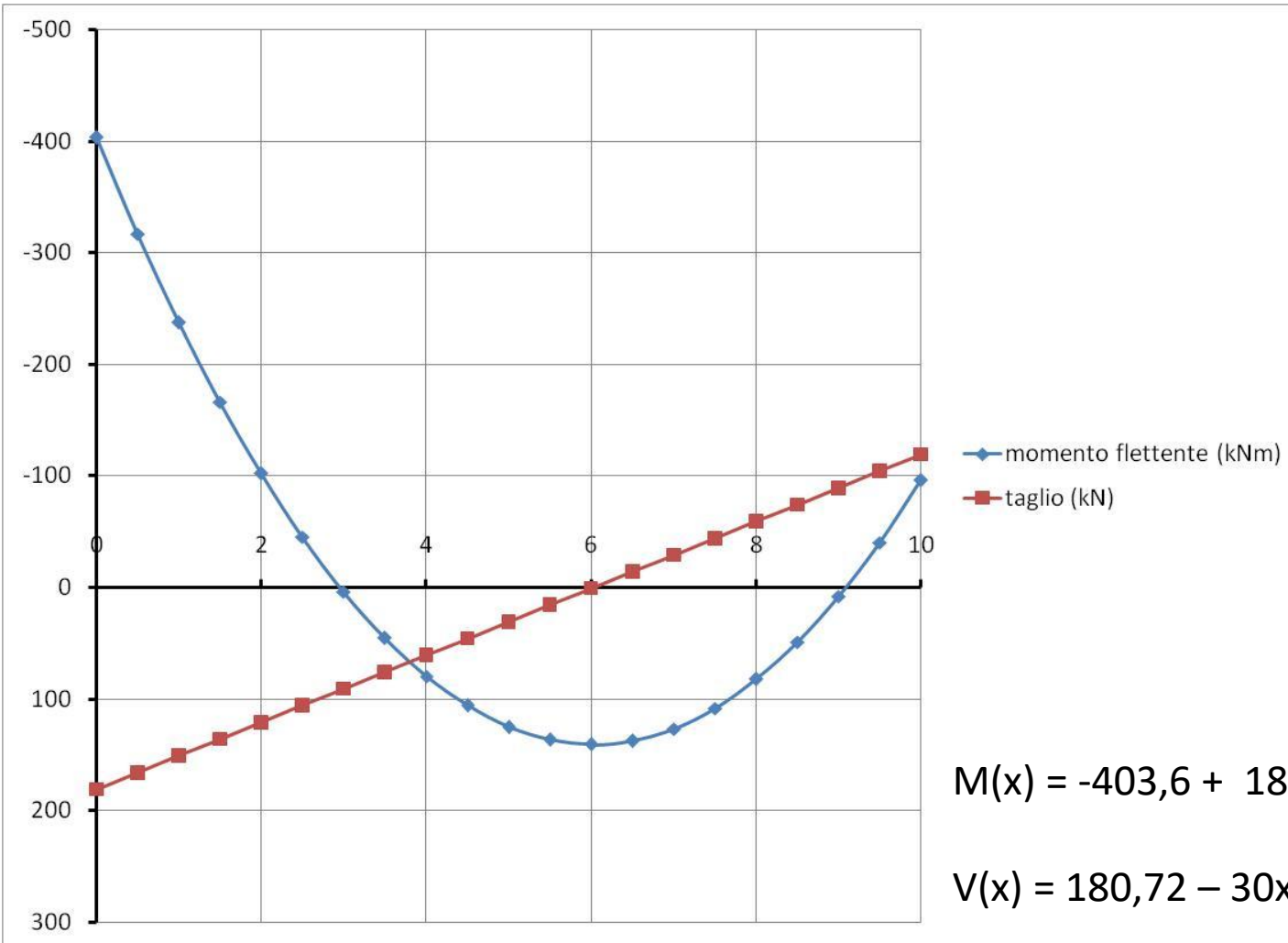
L'assenza di carichi orizzontali produce solo reazioni verticali. Per determinarle imporranno l'equilibrio alla rotazione rispetto a B:

$$R_A \times 10 - 403,6 - 30 \times 10^2 / 2 + 96,4 = 0$$

$$R_A = 180,72 \text{ kN}$$

$$R_B = 30 \times 10 - R_A = 119,28 \text{ kN}$$

ESEMPIO N. 3



ESEMPIO N. 3

DETERMINAZIONE DELLE ROTAZIONI IN A e IN B espresse in radianti

$$\text{ROT A} = q L^3 / (24 EJ) + \alpha_{AB} M_A + \beta_{AB} M_B = 0,00244 + (6,51 \cdot 10^{-6}) (-403,6) + (-3,26 \cdot 10^{-6}) 96,4 = -0,0005$$

$$\text{ROT B} = -q L^3 / (24 EJ) + \alpha_{BA} M_B + \beta_{BA} M_A = -0,00244 + (6,51 \cdot 10^{-6}) 96,4 + (-3,26 \cdot 10^{-6}) (-403,6) = -0,0005$$