

SVOLGIMENTO 3° ESERCITAZIONE: I COEFFICIENTI DI FLESSIBILITÀ E DI RIGIDEZZA

ESEMPIO N 1

La trave AB, appoggiata alle estremità e di sezione rettangolare $b = 50 \text{ cm}$ e $h = 100 \text{ cm}$, lunga $L = 10 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata nell'estremo A da un momento $M = 1000 \text{ kNm}$.

Determinare

1. Il diagramma del momento flettente
2. Il diagramma del taglio
3. Le rotazioni delle estremità A e B prodotte da M

SVOLGIMENTO

LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.04167 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 10 \text{ m}$

modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

$L/EJ = 0.000008 \text{ kNm}^{-1}$

Determinazione coefficienti di flessibilità α e β

$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 2.67E-06 \text{ kNm}^{-1}$ $\beta = -1/6 \cdot L/EJ = -1.33E-06 \text{ kNm}^{-1}$

Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B prodotte da M

$\Phi_A = \alpha \cdot M = 2.67E-06 \cdot 1000 = 0.00267 \text{ radianti}$

$\Phi_B = \beta \cdot M = -1.33E-06 \cdot 1000 = -0.00133 \text{ radianti}$

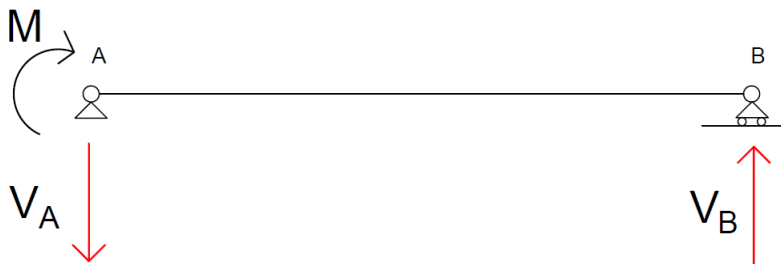
Determinazione reazioni vincolari in A e in B

Equilibrio alla rotazione rispetto a B: $M - V_A \cdot L = 0$

$V_A = 100 \text{ kN}$ (con il verso riportato in figura)

Equilibrio alla traslazione verticale $-V_A + V_B = 0$

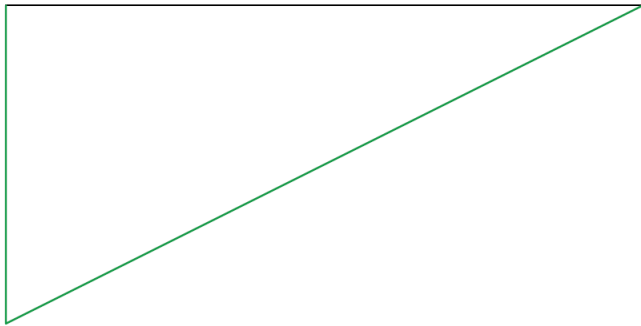
$V_B = 100 \text{ kN}$ (con il verso riportato in figura)



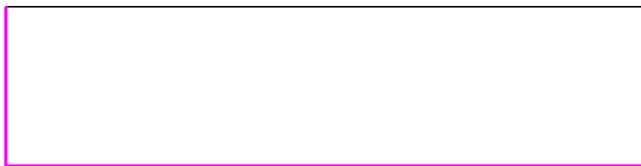
Diagrammi del momento flettente e del taglio

$$Mx = 1000 - 100 \cdot x$$

$$Vx = -100$$



MOMENTO FLETTENTE



TAGLIO

ESEMPIO N 2

La trave AB, appoggiata alle estremità e di sezione rettangolare $b = 30 \text{ cm}$ e $h = 60 \text{ cm}$, lunga $L = 8 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata nell'estremo B da un momento $M = -250 \text{ kNm}$.

Determinare

1. Il diagramma del momento flettente
2. Il diagramma del taglio
3. Le rotazioni delle estremità A e B prodotte da M

SVOLGIMENTO

LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.0054 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 8 \text{ m}$

modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

$L/EJ = 4.94E-05 \text{ kNm}^{-1}$

Determinazione coefficienti di flessibilità α e β

$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 1.65E-05 \text{ kNm}^{-1}$ $\beta = -1/6 \cdot L/EJ = -8.23E-06 \text{ kNm}^{-1}$

Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B prodotte da M

$\Phi_A = \beta \cdot M = -8.23E-06 \cdot (-250) = 0.00206 \text{ radianti}$

$\Phi_B = \alpha \cdot M = 1.65E-05 \cdot (-250) = -0.00412 \text{ radianti}$

Determinazione reazioni vincolari in A e in B



Equilibrio alla rotazione rispetto a B: $V_A \cdot L - M = 0$

$V_A = 31.25 \text{ kN}$

Equilibrio alla traslazione verticale $V_A + V_B = 0$

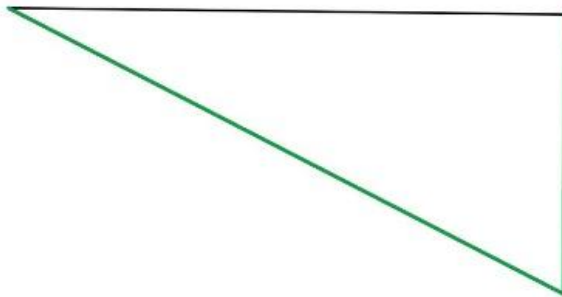
$V_B = -31.25 \text{ kN}$



Diagrammi del
momento flettente e
del taglio

$$Mx = 31.25 \cdot x$$

$$Vx = 31.25$$



MOMENTO



TAGLIO

ESEMPIO N 3

La trave AB, appoggiata alle estremità e di sezione rettangolare $b = 30 \text{ cm}$ e $h = 60 \text{ cm}$, lunga $L = 8 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata nell'estremo B da una distorsione pari a 0.0003 radianti.

Determinare

1. Il diagramma del momento flettente
2. Il diagramma del taglio
3. Le rotazioni delle estremità A e B prodotte da M

SVOLGIMENTO

LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.0054 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 8 \text{ m}$

modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

$L/EJ = 4.94 \text{E-}05 \text{ kNm}^{-1}$

Determinazione coefficienti di flessibilità α e β

$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 1.65 \text{E-}05 \text{ kNm}^{-1}$

$\beta = -1/6 \cdot L/EJ = -8.23 \text{E-}06 \text{ kNm}^{-1}$

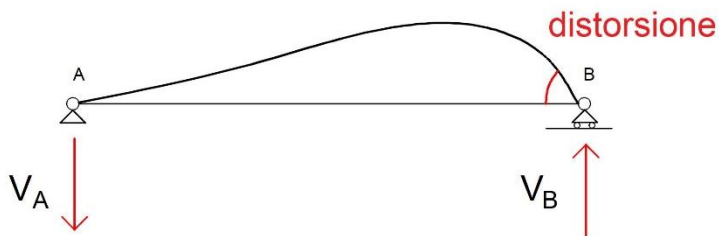
Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B prodotte dalla distorsione in B

$\Phi_A = \beta/\alpha \cdot \Phi_B = -0.00015$ radianti

$\Phi_B = 0.0003$ radianti

$M = \Phi_B / \alpha = 18.225 \text{ kNm}$

Determinazione reazioni vincolari in A e in B



Equilibrio alla rotazione rispetto a B: $-V_A \cdot L + M = 0$

$V_A = 2.278 \text{ kN}$

Equilibrio alla traslazione verticale $-V_A + V_B = 0$

$V_B = 2.278 \text{ kN}$

Diagrammi del momento flettente e del taglio

$$Mx = - 2.278 \cdot x$$

$$Vx = - 2.278$$



TAGLIO



MOMENTO

ESEMPIO N 4

La trave AB, appoggiata alle estremità e di sezione rettangolare $b = 50 \text{ cm}$ e $h = 100 \text{ cm}$, lunga $L = 10 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata nell'estremo B da una distorsione pari a 0.0003 radianti e nell'estremo A da $M_A = 200 \text{ kNm}$

Determinare

Il diagramma del momento flettente

Il diagramma del taglio

Le rotazioni delle estremità A e B prodotte da M e dalla distorsione

SVOLGIMENTO

LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.0417 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 10 \text{ m}$ modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

$$L/EJ = 0.000008 \text{ kNm}^{-1}$$

Determinazione coefficienti di flessibilità α e β

$$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 2.67\text{E-}06 \text{ kNm}^{-1} \quad \beta = -1/6 \cdot L/EJ = -1.33\text{E-}06 \text{ kNm}^{-1}$$

Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B prodotte dalla distorsione in B e dal momento M applicato in A

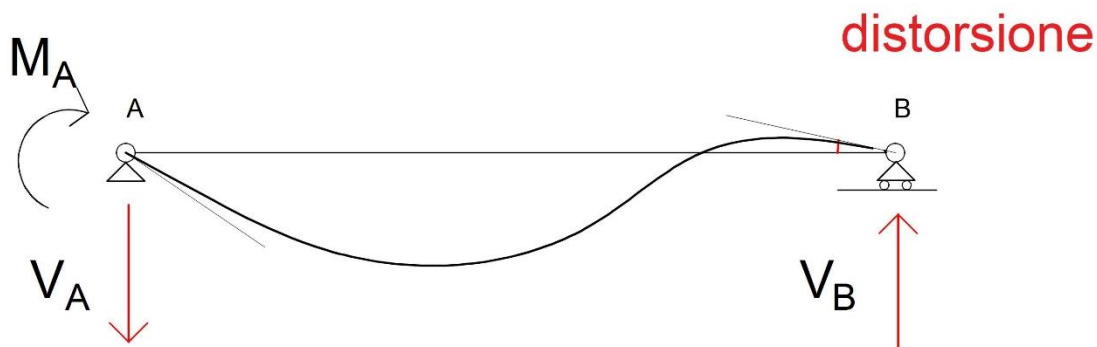
$$\Phi_B = 0.0003 \text{ radianti}$$

$$M_B = \Phi_B / \alpha = 112.5 \text{ kNm}$$

$$\text{Rotazione in B} \quad \beta M_A + \Phi_B = 3.33\text{E-}05 \text{ radianti}$$

$$\text{Rotazione in A} \quad \alpha M_A + \beta/\alpha \cdot \Phi_B = 0.000383333 \text{ radianti}$$

Determinazione reazioni vincolari in A e in B



$$\text{Equilibrio alla rotazione rispetto a B: } -V_A \cdot L + M_A + M_B = 0$$

$$V_A = 31.25 \text{ kN}$$

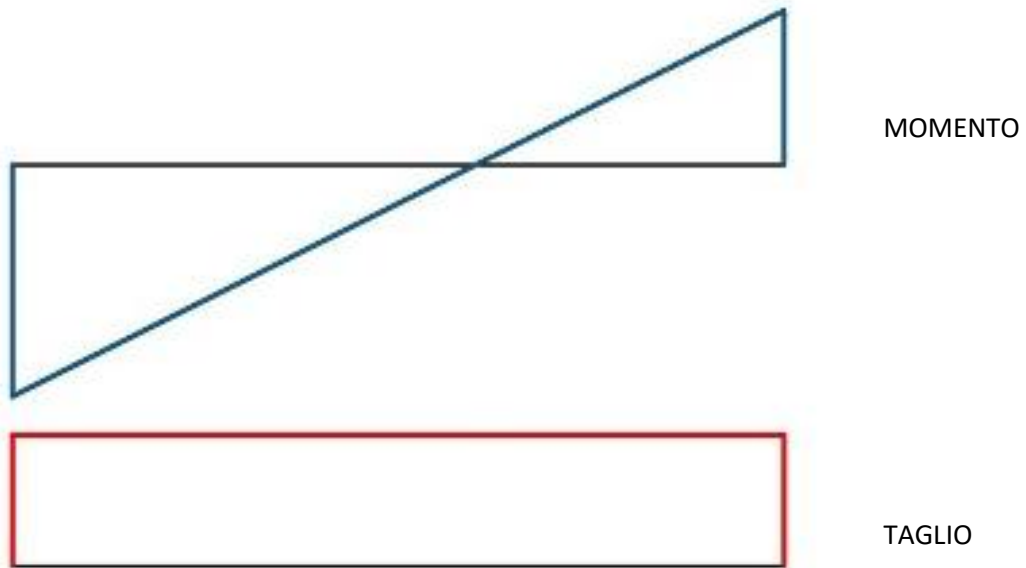
$$\text{Equilibrio alla traslazione verticale } -V_A + V_B = 0$$

$$V_B = 31.25 \text{ Kn}$$

Diagrammi del momento flettente e del taglio

$$Mx = 200 - 31.25 \cdot x$$

$$Vx = - 31.25$$



ESEMPIO N 5

La trave AB, incastrata in A e appoggiata in B e di sezione rettangolare $b = 50 \text{ cm}$ e $h = 100 \text{ cm}$, lunga $L = 10 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata nell'estremo A da una distorsione pari a $0,0003$ radianti e nell'estremo B da $M = 200 \text{ kNm}$

Determinare

Il momento iperstatico in A

Il diagramma del momento flettente

Il diagramma del taglio

Le rotazioni delle estremità A e B prodotte da M e dalla distorsione

SVOLGIMENTO

LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.0417 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 10 \text{ m}$ modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

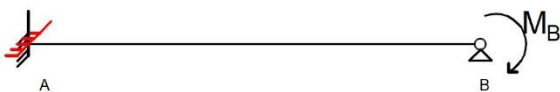
$$L/EJ = 0.000008 \text{ kNm}^{-1} \quad EJ/L = 125000 \text{ kNm}$$

Determinazione coefficienti di flessibilità e rigidezza

$$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 2.67E-06 \text{ kNm}^{-1} \quad \beta = -1/6 \cdot L/EJ = -1.33E-06 \text{ kNm}^{-1}$$

$$U = 3 EJ/L = 375000 \text{ kNm}$$

distorsione in A



Determinazione momento iperstatico in A

$$M_A = -\beta/\alpha M_B + U \Phi_A = 212.5 \text{ kNm}$$

Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B prodotte dalla distorsione in A e dal momento M applicato in B

$$\text{Rotazione in A} \quad \alpha M_A + \beta M_B = 0.0003 \text{ radianti}$$

$$\text{Rotazione in B} \quad \beta M_A + \alpha M_B = 0.00025 \text{ radianti}$$

Determinazione reazioni vincolari in A e in B

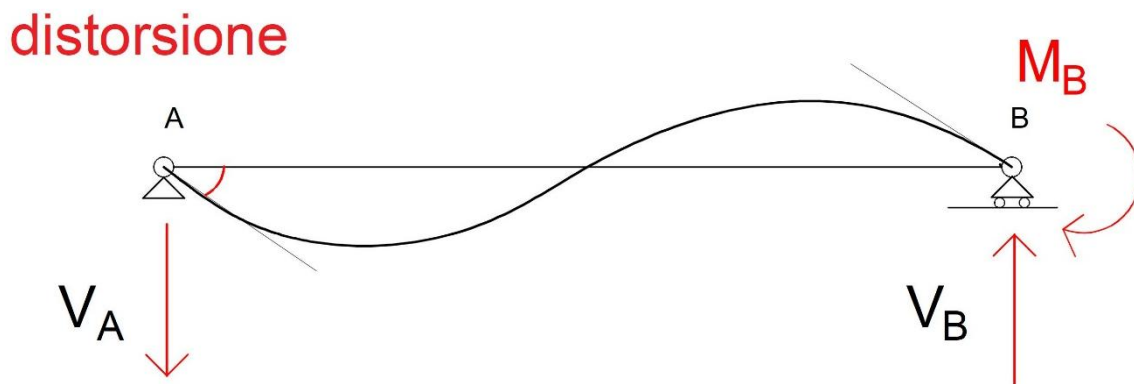
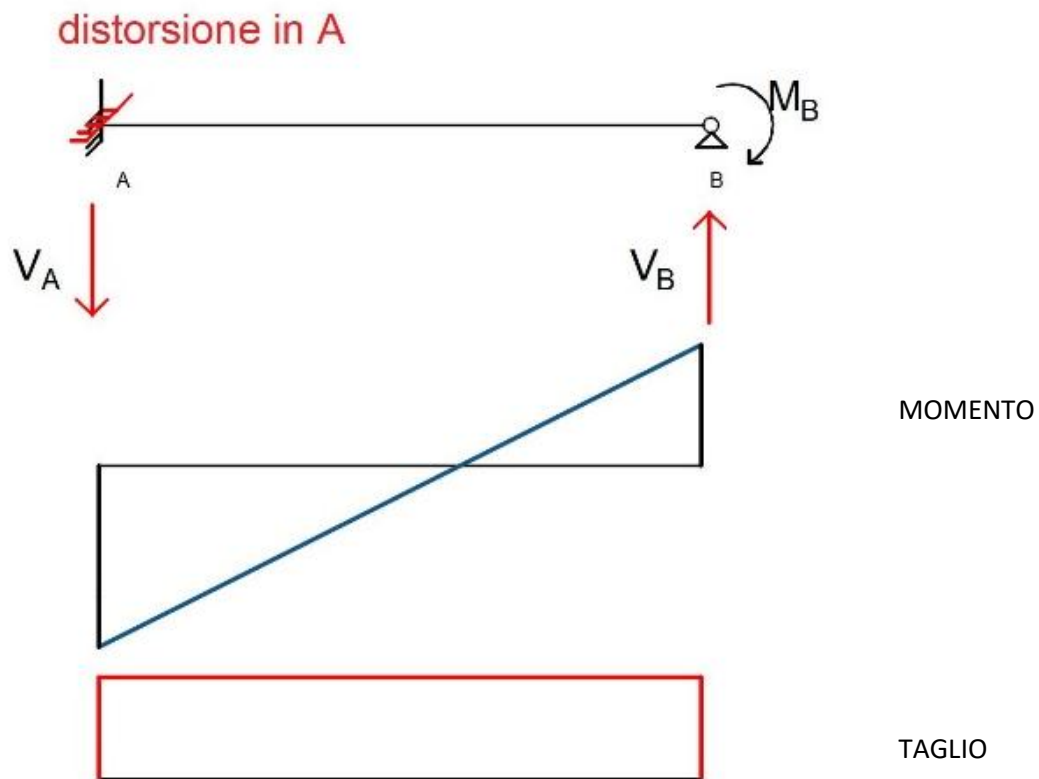
$$\text{Equilibrio alla rotazione rispetto a B: } -V_A L + M_A + M_B = 0$$

$$V_A = 41.25 \text{ kN}$$

Equilibrio alla traslazione verticale - $V_A + V_B = 0$
 $V_B = 41.25 \text{ Kn}$

Diagrammi del momento flettente e del taglio
 $Mx = 212.5 - 41.25 \cdot x$

$Vx = - 41.25$



ESEMPIO N 6

La trave AB, doppiamente incastrata e di sezione rettangolare $b = 50 \text{ cm}$ e $h = 100 \text{ cm}$, lunga $L = 10 \text{ m}$ in calcestruzzo armato ($E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$) è sollecitata da un carico uniformemente ripartito $q = 30 \text{ kN/m}$ e l'estremo A ha un cedimento verticale di 1 mm .

Determinare

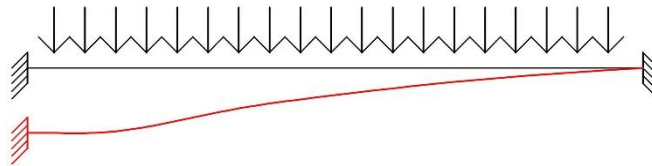
I momenti iperstatici in A e in B

Il diagramma del momento flettente

Il diagramma del taglio

Le rotazioni delle estremità A e B prodotte dal carico distribuito q e dal cedimento verticale in A

SVOLGIMENTO



LAVORO PREPARATORIO

Determinazione di L/EJ

Momento di inerzia J rispetto all'asse baricentrico della sezione $b \cdot h^3/12 = 0.0417 \text{ m}^4$

Lunghezza dell'asta $L = 10 \text{ m}$ modulo elastico del calcestruzzo $E_c = 30 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$

$L/EJ = 0.000008 \text{ kNm}^{-1}$

$EJ/L = 125000 \text{ kNm}$

Determinazione coefficienti di flessibilità e rigidezza e dei momenti di incastro perfetto

$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 2.67E-06 \text{ kNm}^{-1}$

$\beta = -1/6 \cdot L/EJ = -1.33E-06 \text{ kNm}^{-1}$

$S = 6 EJ/L = 750000 \text{ kNm}$

$\mu_A = -qL^2/12 = -250 \text{ kNm}$

$\mu_B = qL^2/12 = 250 \text{ kNm}$

Determinazione rotazione rigida prodotta dal cedimento in A

$\psi_{AB} = -0,001/10 = -0.0001$

Determinazione momento iperstatico in A e in B

$M_A = -S \psi_{AB} + \mu_A = -175 \text{ kNm}$

$M_B = -S \psi_{AB} + \mu_B = 325 \text{ kNm}$

Determinazione delle rotazioni delle estremità A e B

Rotazione in A $\alpha M_A + \beta M_B + qL^3/(24EJ) = 0.0001 \text{ radianti}$

Rotazione in B $\beta M_A + \alpha M_B - qL^3/(24EJ) = 0.0001 \text{ radianti}$

Determinazione reazioni vincolari in A e in B

Equilibrio alla rotazione rispetto a B: $V_A L + M_A + M_B - q L^2/2 = 0$

$$V_A = 135 \text{ kN}$$

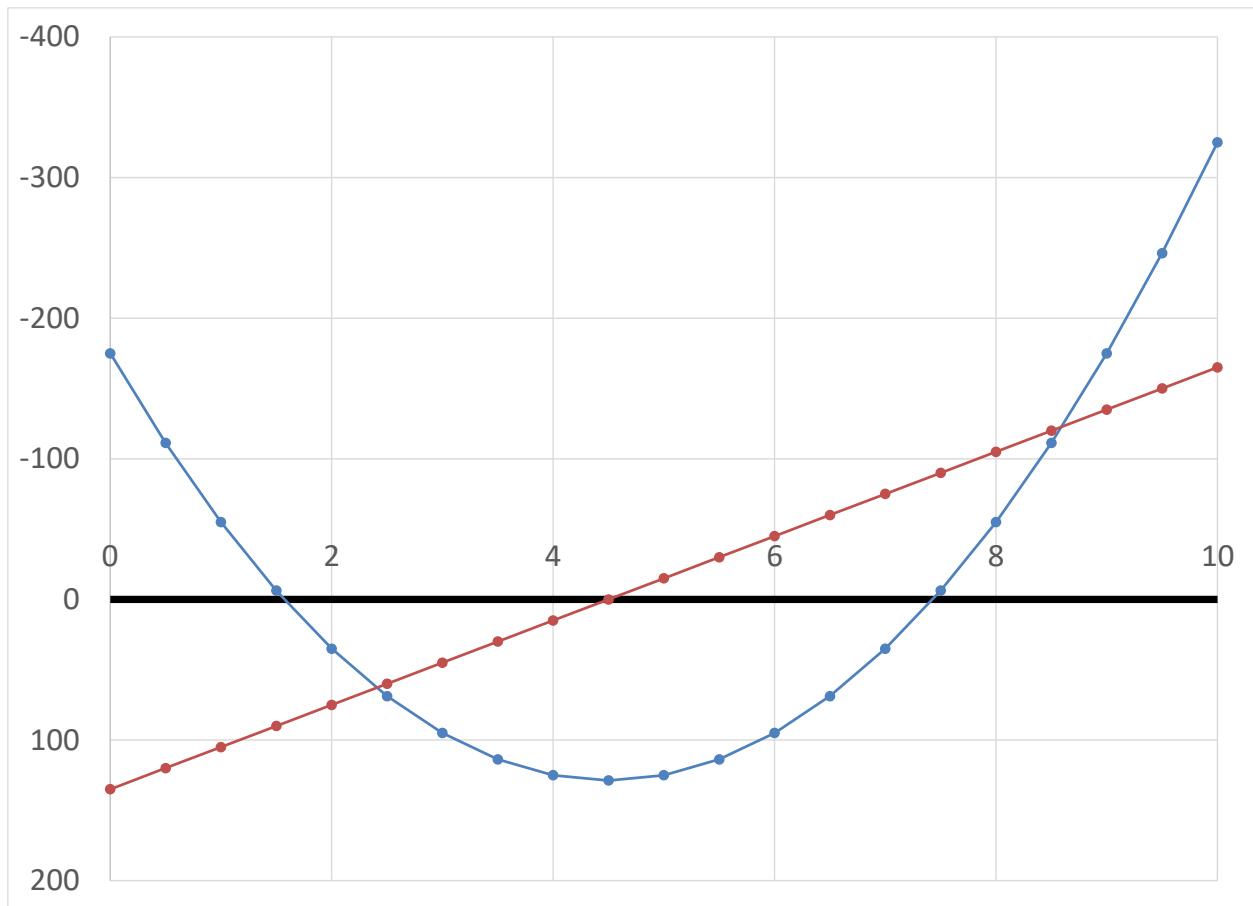
Equilibrio alla traslazione verticale $V_A + V_B = q L$

$$V_B = 165 \text{ kN}$$

Diagrammi del momento flettente e del taglio

$$M_x = -175 + 135 \cdot x - 30 \frac{x^2}{2}$$

$$V_x = 135 - 30 x$$



DEFORMATA

