Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio

Corso Integrato di Scienza e Tecnica delle Costruzioni

Modulo di **Tecnica delle Costruzioni**

A.A. 2025-2026
2° semestre

CFU 8

Docente

Marco Zucca

METODO DELLE DEFORMAZIONI E SUE APPLICAZIONI

POLITECNICO
MILANO 1863
Scuola Master Fratelli Pesenti

Università degli Studi di Cagliari

DICAAR

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E ARCHITETTURA

Metodo delle Rotazioni

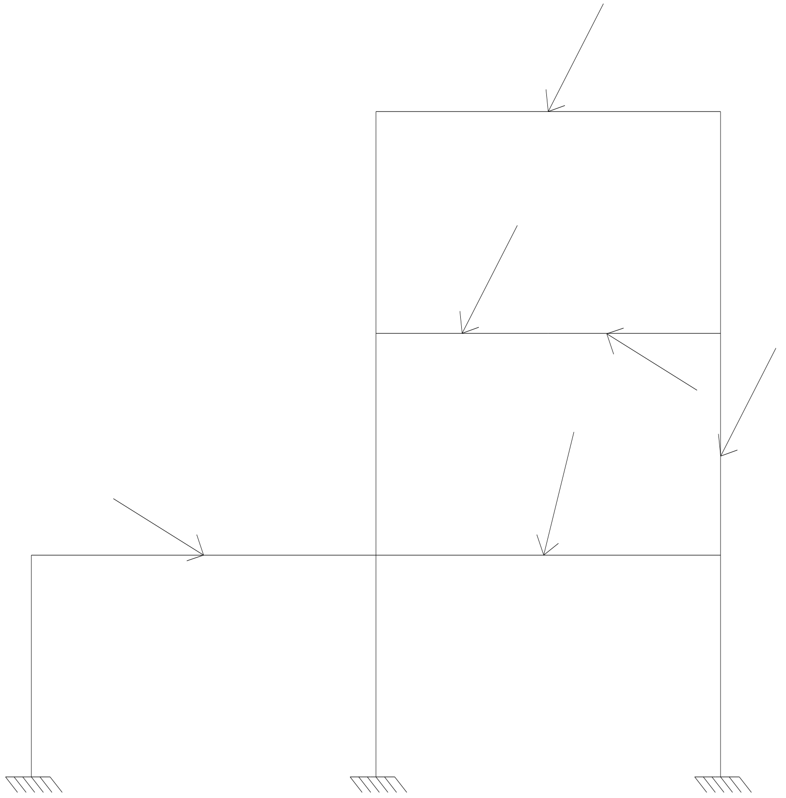
anche detto Metodo delle deformazioni o Metodo degli spostamenti

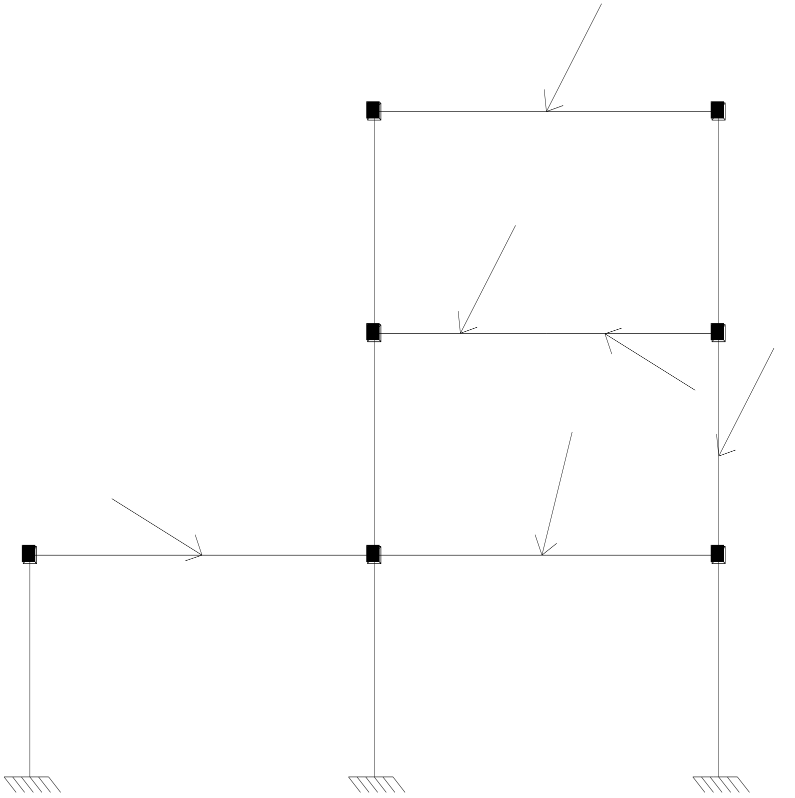
- Le incognite coincidono con le rotazioni dei nodi interni.

- Tali incognite sono cinematicamente indeterminate, cioè le rotazioni sono compatibili alla condizione vincolare del telaio, ma solo una configurazione deformata è in equilibrio.

- Il calcolo delle incognite è ottenuto imponendo l'equilibrio in corrispondenza dei nodi interni, nell'ipotesi di inestensibilità assiale delle aste.

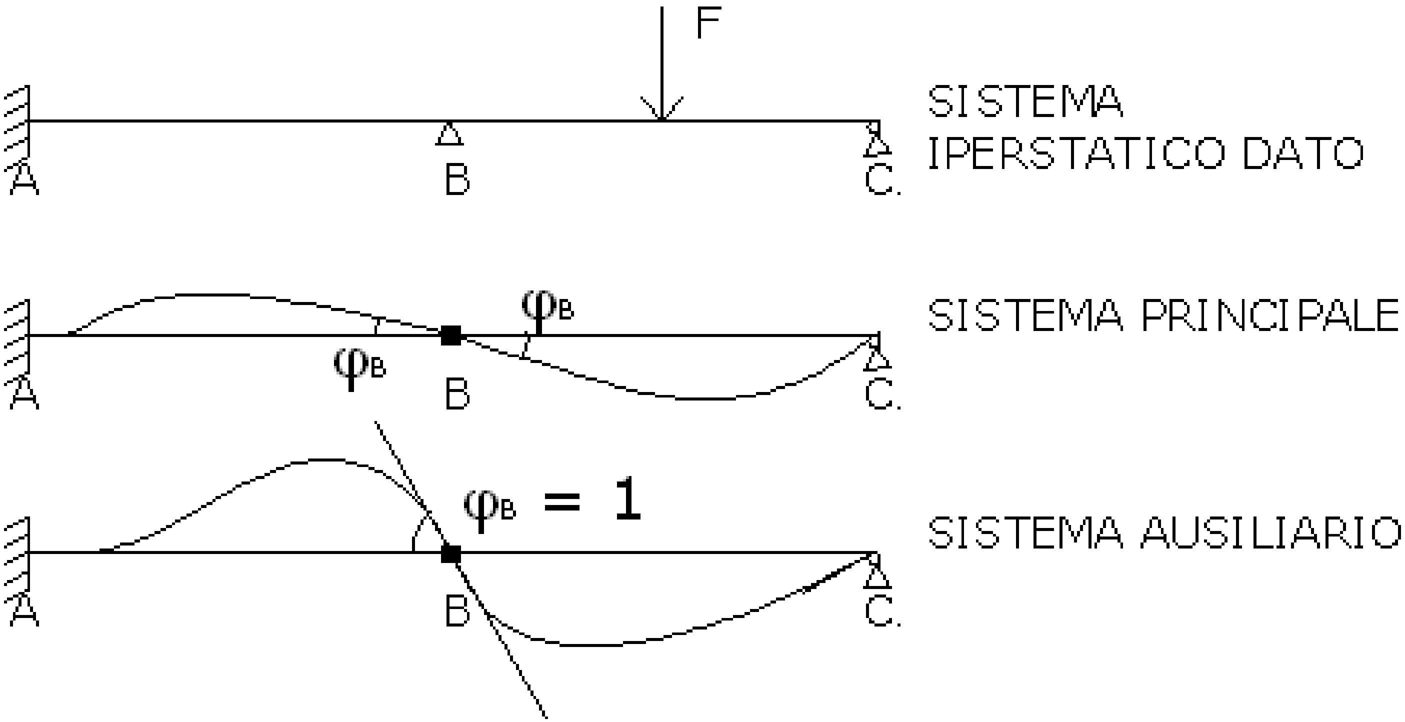
- Occorre associare al sistema effettivo iperstatico, un sistema principale, geometricamente determinato, ottenuto con l'introduzione di opportuni vincoli addizionali in particolari punti, assumendo come incognite i movimenti effettivi dei punti considerati.





SISTEMA IPERSTATICO
i nodi, che individuano gli estremi delle aste, possono subire rotazioni e spostamenti

SISTEMA PRINCIPALE
in ciascun nodo è fissato un morsetto che impedisce ogni possibile movimento



- Considerato di volta in volta un nodo, in cui sono stati apposti vincoli addizionali, imprimiamo alle aste che in esso confluiscono una distorsione angolare e determiniamo i momenti indotti alle estremità delle aste.

- Si scrivono tante equazioni di equilibrio quanti sono i movimenti incogniti.

- Relativamente al nodo in cui confluiscono n aste, per l'equilibrio deve risultare:

$$\sum_{n} M_{oi} = 0$$

- Se nel nodo fosse applicata una coppia esterna m_0:

$$\sum_{n} M_{oi} = m_0$$

- Considerando i coefficienti di rigidezza possiamo scrivere che:

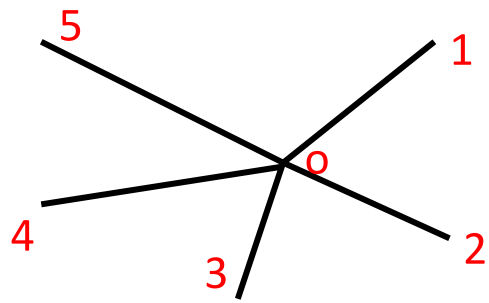
il momento M_{oi} all'estremo o dell'asta oi

è dato dalla somma dei seguenti contributi:

- rotazione dell'estremo o (φ_o): $\mathbf{M_{oi} = W_{oi} \cdot \varphi_o}$
- rotazione dell'estremo i (φ_i): $\mathbf{M_{oi} = V_{oi} \cdot \varphi_i}$
- rotazione rigida dell'asta oi (ψ_{oi}): $\mathbf{M_{oi} = -S_{oi} \cdot \psi_{oi}}$
- carichi esterni (q): $\mathbf{M_{oi} = \mu_{oi}}$

Per la sovrapposizione degli effetti risulta:

$$M_{oi} = W_{oi} \cdot \varphi_o + V_{oi} \cdot \varphi_i - S_{oi} \cdot \psi_{oi} + \mu_{oi}$$



Considerando un generico nodo O di una struttura nel quale convergono 5 aste

$$M_{o1} = W_{o1} \cdot \varphi_o + V_{o1} \cdot \varphi_1 - S_{o1} \cdot \psi_{o1} + \mu_{o1}$$
$$M_{o2} = W_{o2} \cdot \varphi_o + V_{o2} \cdot \varphi_2 - S_{o2} \cdot \psi_{o2} + \mu_{o2}$$
$$M_{o3} = W_{o3} \cdot \varphi_o + V_{o3} \cdot \varphi_3 - S_{o3} \cdot \psi_{o3} + \mu_{o3}$$
$$M_{o4} = W_{o4} \cdot \varphi_o + V_{o4} \cdot \varphi_4 - S_{o4} \cdot \psi_{o4} + \mu_{o4}$$
$$M_{o5} = W_{o5} \cdot \varphi_o + V_{o5} \cdot \varphi_5 - S_{o5} \cdot \psi_{o5} + \mu_{o5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{oi} = \varphi_0 \sum_{i=1}^{n} W_{0i} + \sum_{i=1}^{n} V_{0i} \cdot \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} S_{0i} \cdot \psi_{0i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{0i}$$

- L’equazione di nodo del nodo o nel quale confluiscono n aste <u>con vincoli di continuità</u> risulta:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{oi} = 0$$

$$\varphi_o \cdot \sum_{i=1}^{n} W_{oi} + \sum_{i=1}^{n} V_{io} \cdot \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} S_{oi} \cdot \psi_{oi} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{oi} = 0$$

- In presenza di coppia $\mathbf{m_o}$ applicata nel nodo o:

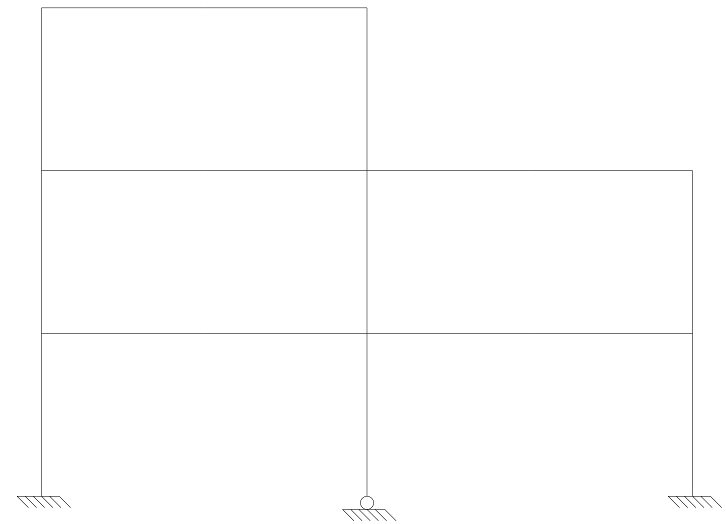
$$\varphi_o \cdot \sum_{i=1}^{n} W_{oi} + \sum_{i=1}^{n} V_{io} \cdot \varphi_i - \sum_{i=1}^{n} S_{oi} \cdot \psi_{oi} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{oi} = m_o$$

- In presenza di aste che convergono nel nodo o che hanno l'estremo opposto incernierato:

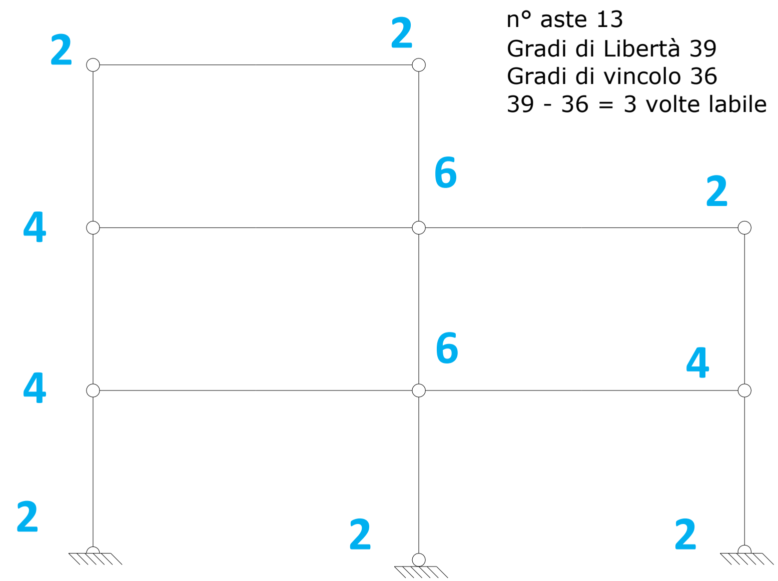
- la rigidezza W_{oi} diventa $\mathbf{U_{oi}}$
- la rigidezza V_{io} è nulla $\mathbf{0}$
- la rigidezza S_{oi} diventa $\mathbf{U_{oi}}$
- il momento di incastro perfetto μ_{oi} diventa $\boldsymbol{\mu^*_{oi}}$

Le equazioni di nodo sono sufficienti ha risolvere le strutture iperstatiche a nodi fissi. Le strutture iperstatiche a nodi spostabili richiedono ulteriori equazioni.

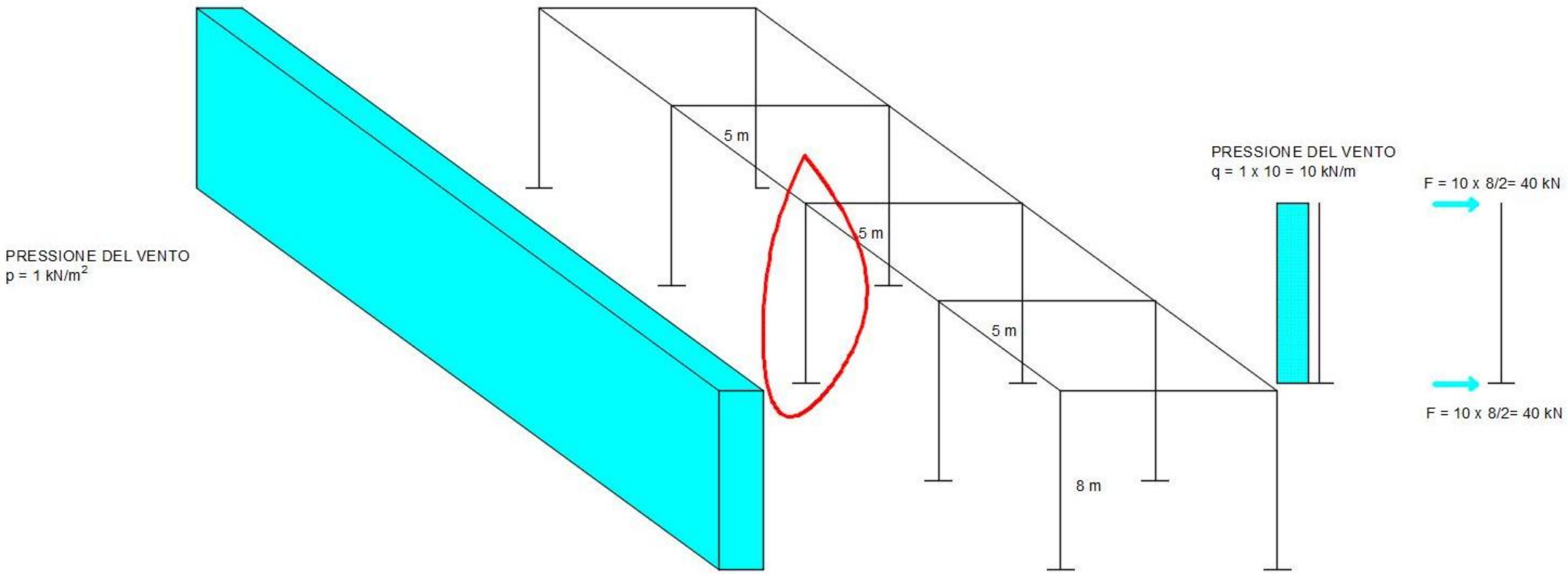
Per valutare se una struttura è a nodi spostabili occorre sostituire in tutti i nodi, interni ed esterni, delle cerniere e valutare se la struttura diventa labile.



2 aste che convergono in una cerniera hanno **2 gradi di vincolo**
3 aste che convergono in una cerniera hanno **4 gradi di vincolo**
4 aste che convergono in una cerniera hanno **6 gradi di vincolo**



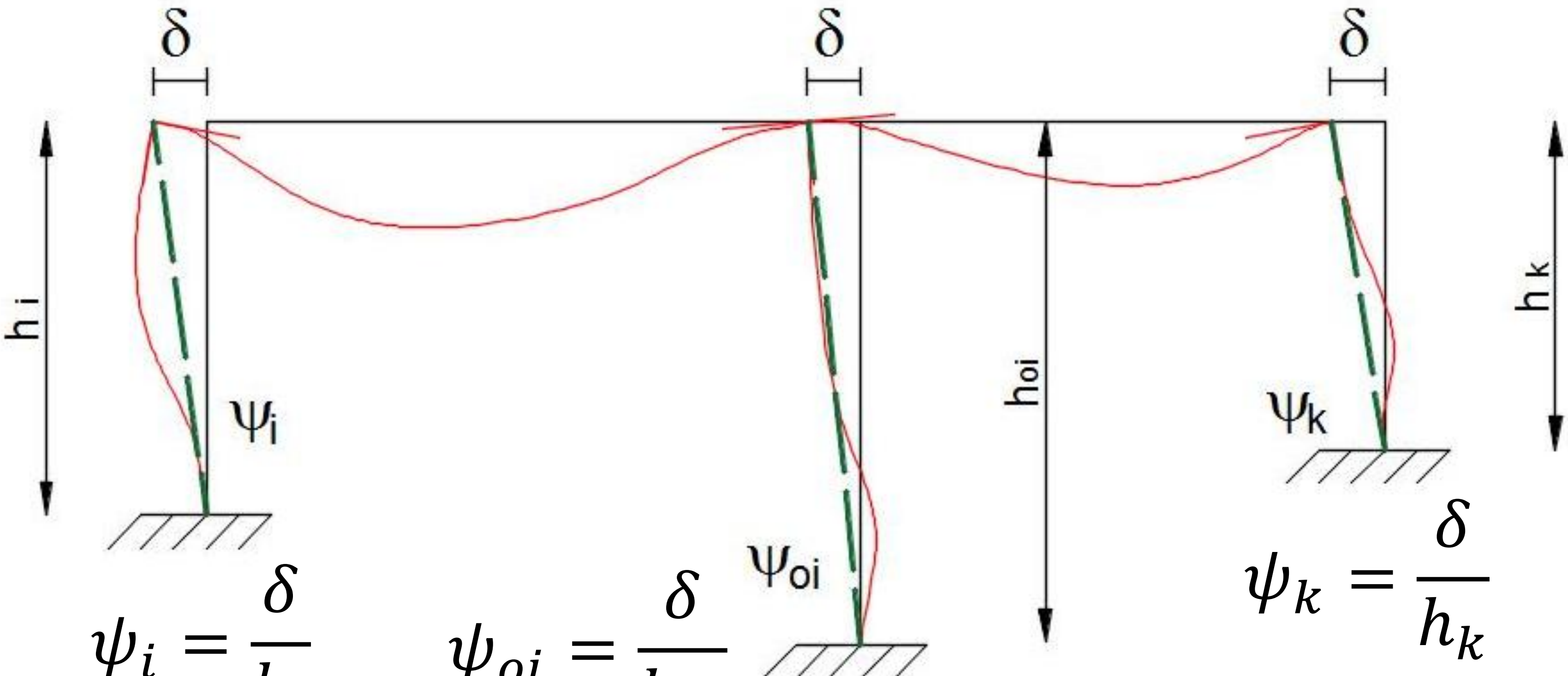
- Per risolvere tali strutture è necessario preventivamente convertire i carichi distribuiti agenti sui ritti con carichi concentrati applicati nei nodi.



Casi particolari

- Nei telai con ritti verticali e travate in linea, per l'ipotesi assunta dell'inestendibilità assiale, i nodi di uno stesso piano hanno tutti uguale spostamento e quindi uguale rotazione rigida.

- Nel caso di ritti di diversa altezza, da semplici considerazioni geometriche si deduce una relazione fra le rotazioni rigide dei ritti.

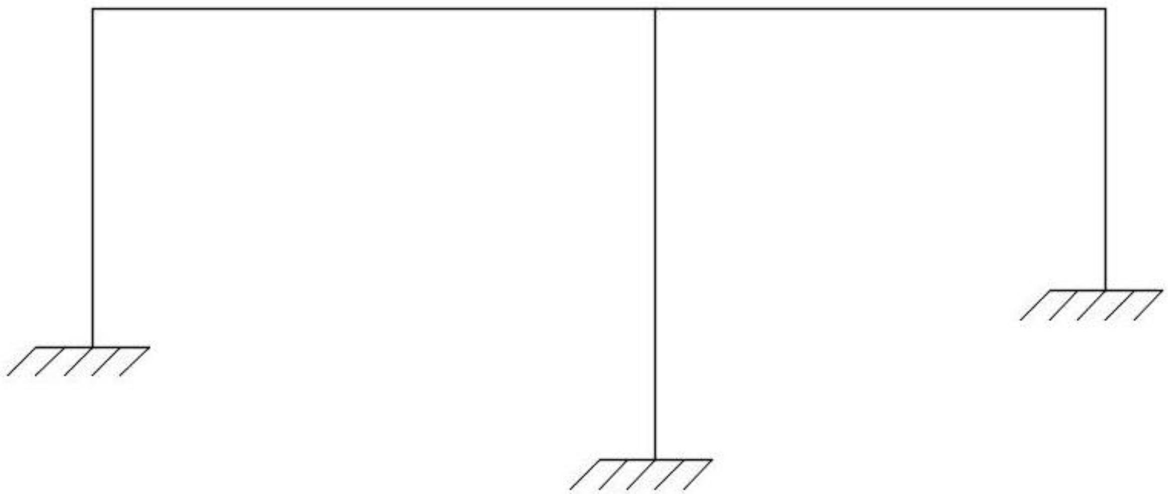


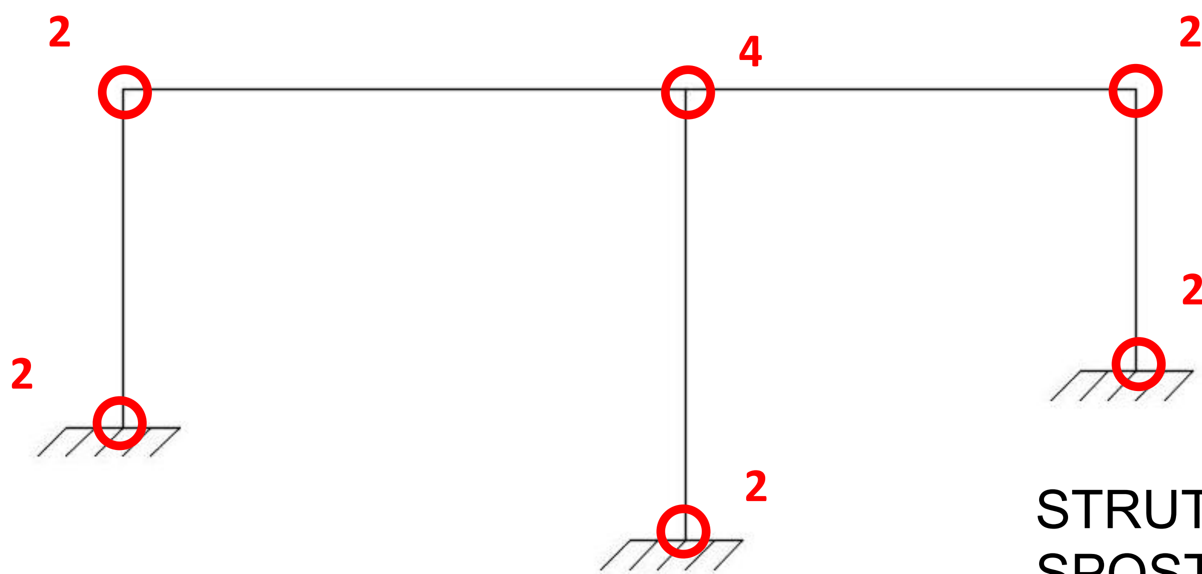
$$\psi_i = \frac{\delta}{h_i} \qquad \psi_{oi} = \frac{\delta}{h_{oi}} \qquad \psi_k = \frac{\delta}{h_k}$$

$$\delta = \psi_i \cdot h_i = \psi_{oi} \cdot h_{oi} = \psi_k \cdot h_k$$

$$\psi_{oi} = v_{ok} \cdot \psi_k \qquad v_{ok} = \frac{h_k}{h_{oi}}$$

L'equazione di piano per risolvere le strutture a nodi spostabili

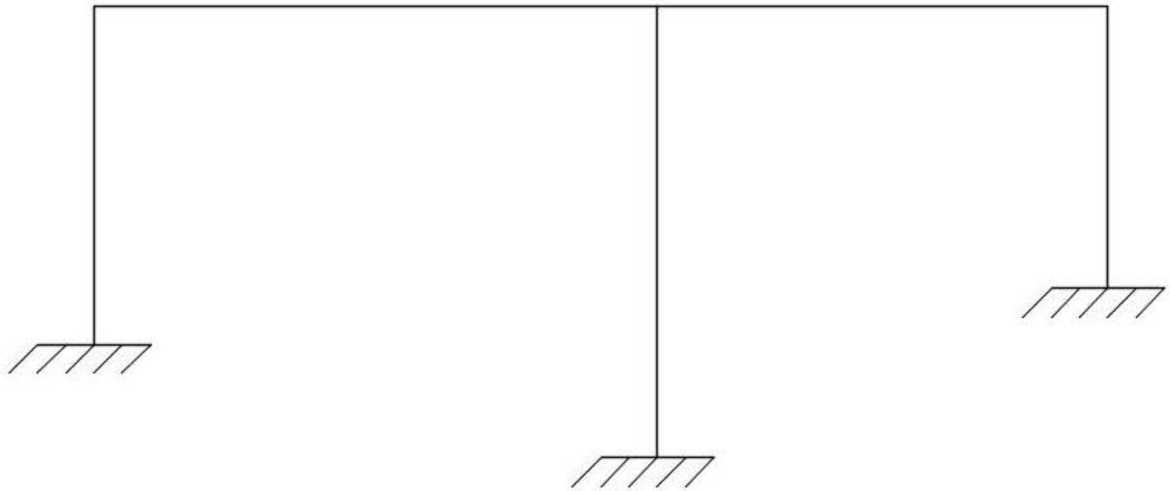


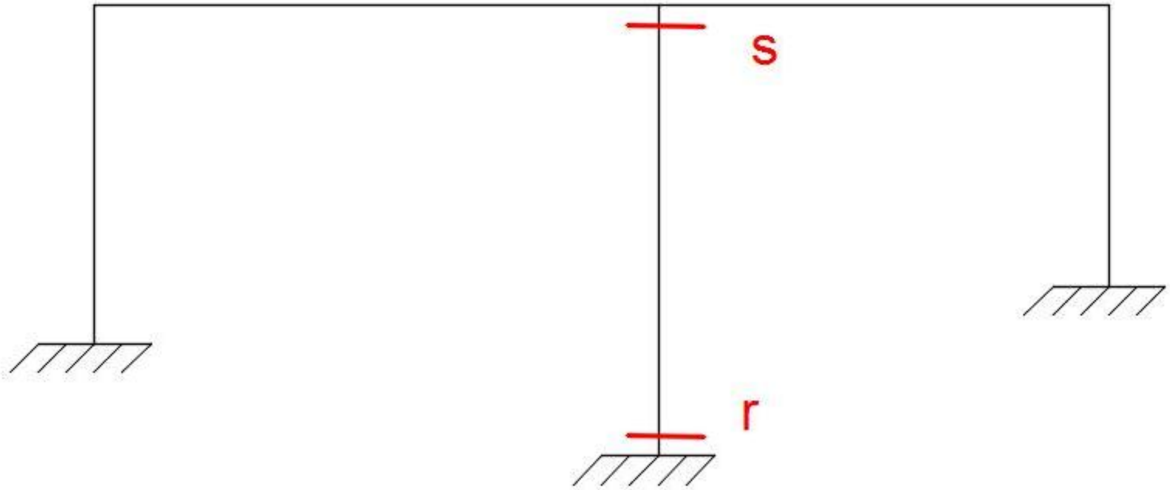


5 aste
15 GdL
14 GdV
IPOSTATICA

STRUTTURA A NODI SPOSTABILI

L’equazione di piano per risolvere le strutture a nodi spostabili

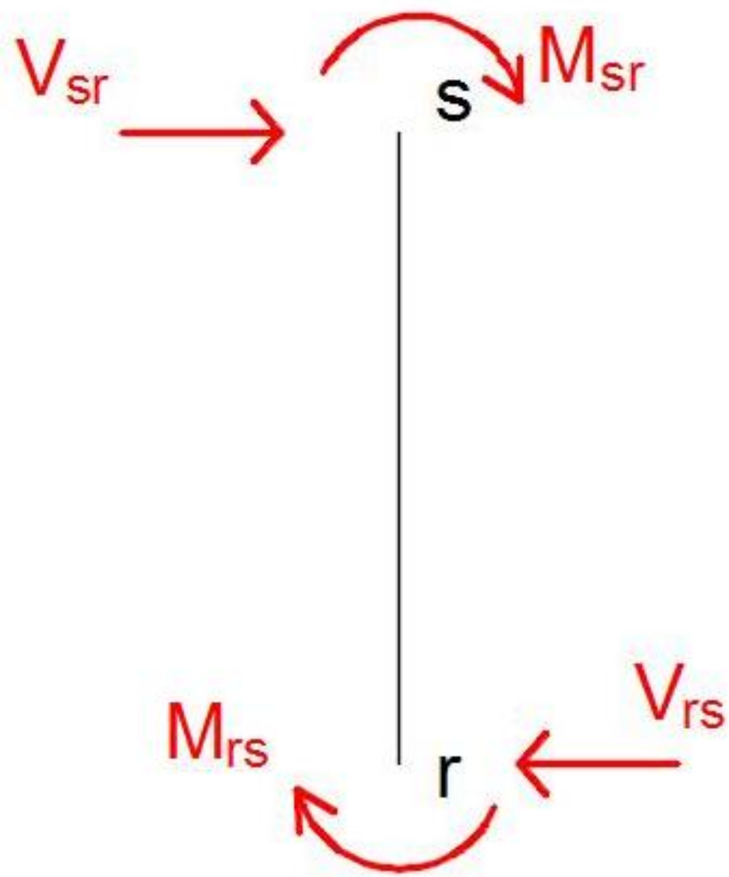


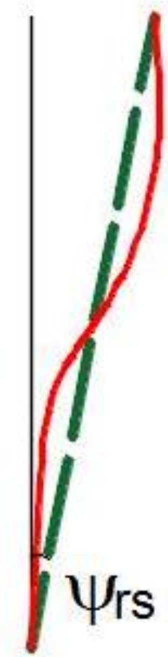


Il caso dell'ordito ortogonale con ritti verticali di uguale altezza

Isolato il generico ritto di un piano scriviamo l'equilibrio alla traslazione:

$$M_{sr} + M_{rs} + V_{sr} \cdot h_{sr} = 0$$

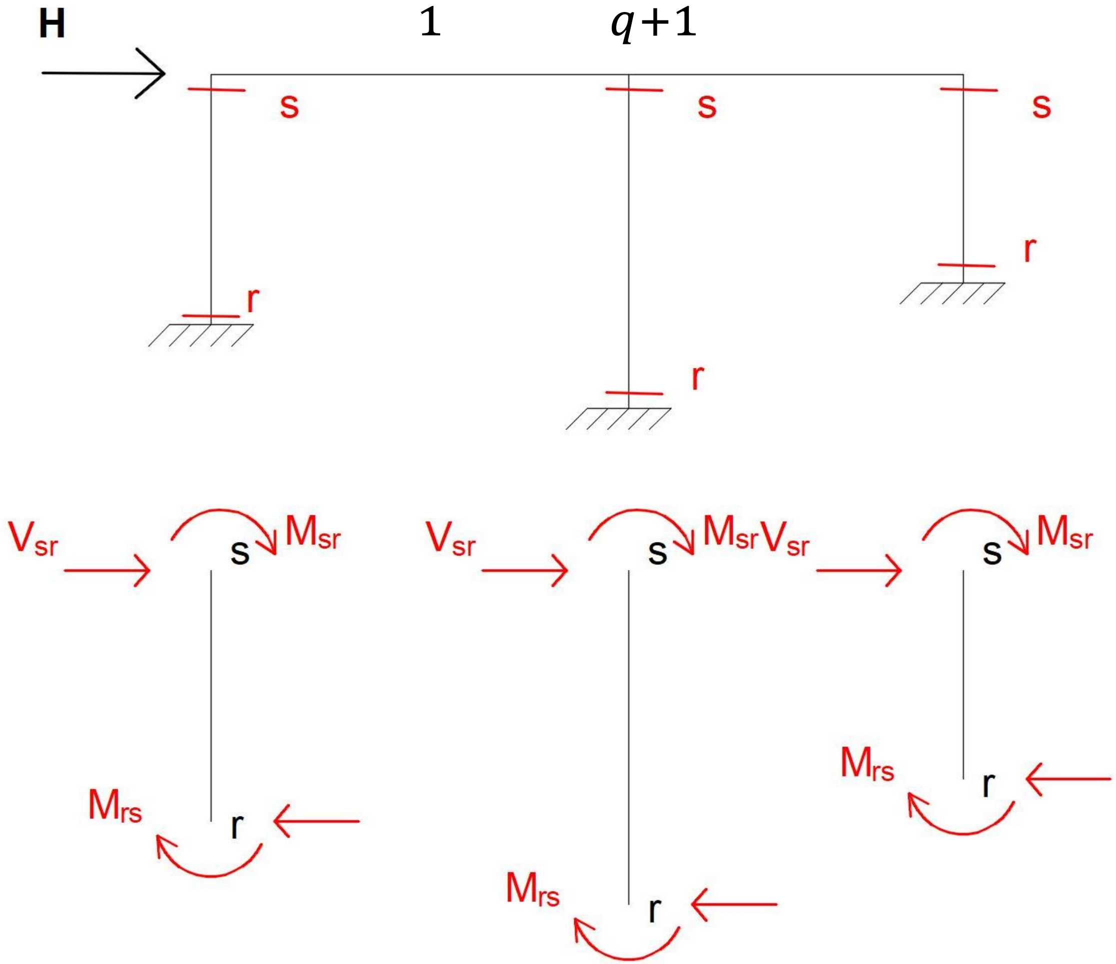




I singoli valori del taglio all’estremità dei ritti non sono noti, ma è conosciuta la loro risultante, data dalla somma di tutte le componenti orizzontali H_q delle forze esterne che agiscono al di sopra del piano considerato.

Per il generico piano q-esimo possiamo scrivere:

$$\sum_{1}^{t} V = \sum_{q+1}^{n} H_q$$



$$M_{sr} + M_{rs} + V_{sr} \cdot h_{sr} = 0$$

$$\frac{M_{sr}}{h_{sr}} + \frac{M_{rs}}{h_{sr}} + V_{sr} = 0$$

$$\sum_{1}^{t} \left(\frac{M_{sr}}{h_{sr}}\right) + \sum_{1}^{t} \left(\frac{M_{rs}}{h_{sr}}\right) + \sum_{1}^{t} V_{sr} = 0$$

$$\sum_{1}^{t} \left(\frac{M_{sr}}{h_{sr}}\right) + \sum_{1}^{t} \left(\frac{M_{rs}}{h_{sr}}\right) + \sum_{1+q}^{n} H_{q} = 0$$

Esplicitando i valori di M_{rs} ed M_{sr}, introducendo le rigidezze, si ottiene l’equazione del generico piano.

$$\sum_{1}^{t}\frac{\left(w_{sr}\cdot\varphi_{s}+v_{sr}\cdot\varphi_{r}-s_{sr}\cdot\psi_{sr}\right)}{h_{sr}}+\sum_{1}^{t}\frac{\left(w_{rs}\cdot\varphi_{r}+v_{rs}\cdot\varphi_{s}-s_{rs}\cdot\psi_{rs}\right)}{h_{sr}}+\sum_{1+q}^{n}H_{q}=0$$

$$\sum_{1}^{t}\frac{\left(w_{sr}+v_{rs}\right)\cdot\varphi_{s}+\left(w_{rs}+v_{sr}\right)\cdot\varphi_{r}-\left(s_{sr}+s_{rs}\right)\cdot\psi_{sr}}{h_{sr}}+\sum_{1+q}^{n}H_{q}=0$$

$$\sum_{1}^{t}\frac{\left(w_{sr}+v_{rs}\right)}{h_{sr}}\cdot\varphi_{s}+\sum_{1}^{t}\frac{\left(w_{rs}+v_{sr}\right)}{h_{sr}}\cdot\varphi_{r}-\sum_{1}^{t}\frac{\left(s_{sr}+s_{rs}\right)}{h_{sr}}\cdot\psi_{sr}+\sum_{1+q}^{n}H_{q}=0$$

$$\boxed{\sum_{1}^{t}\frac{S_{sr}}{h_{sr}}\cdot\varphi_{s}+\sum_{1}^{t}\frac{S_{rs}}{h_{sr}}\cdot\varphi_{r}-\sum_{1}^{t}\frac{(S_{sr}+S_{rs})}{h_{sr}}\cdot\psi_{sr}+\sum_{1+q}^{n}H_{q}=0}$$

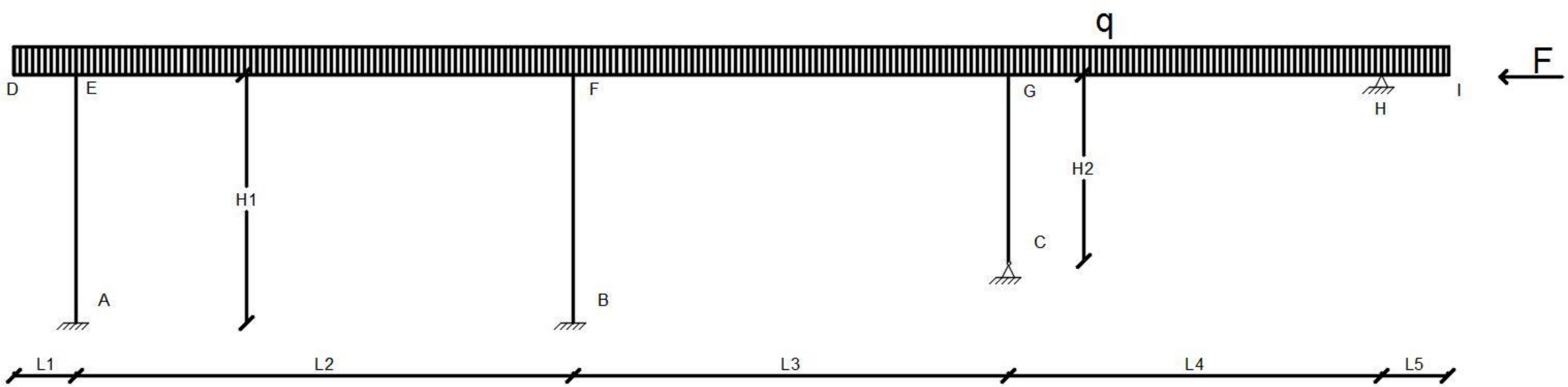
$$\boxed{\sum_{1}^{t}\frac{S_{sr}}{h_{sr}}\cdot\varphi_s+\sum_{1}^{t}\frac{S_{rs}}{h_{sr}}\cdot\varphi_r-\sum_{1}^{t}\frac{(S_{sr}+S_{rs})}{h_{sr}}\cdot\psi_{sr}+\sum_{1+q}^{n}H_q=0}$$

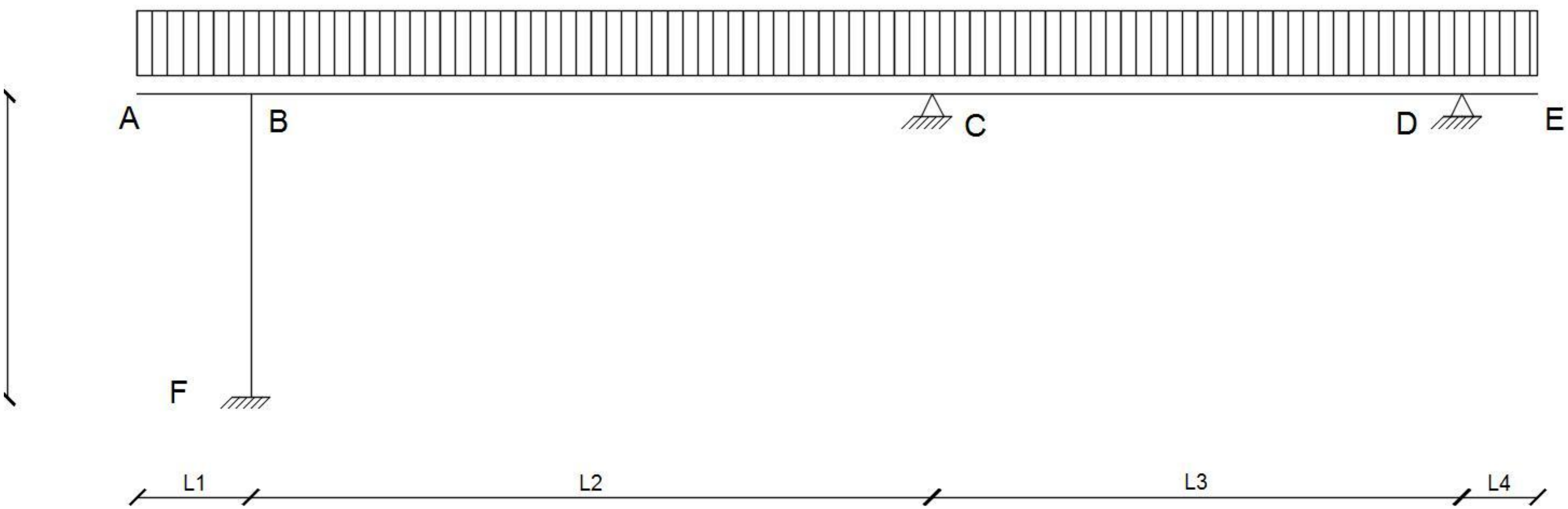
In presenza di un ritto che converge nel nodo s che ha l'estremo r incernierato:

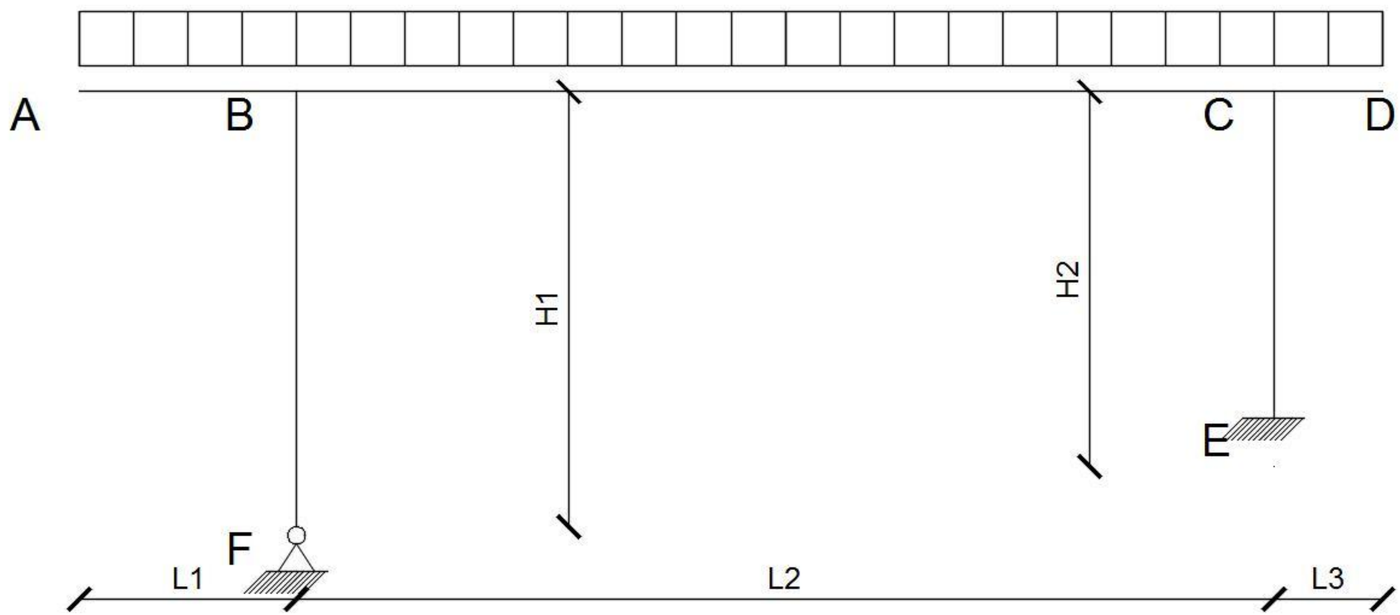
la rigidezza S_{rs} diventa **0**

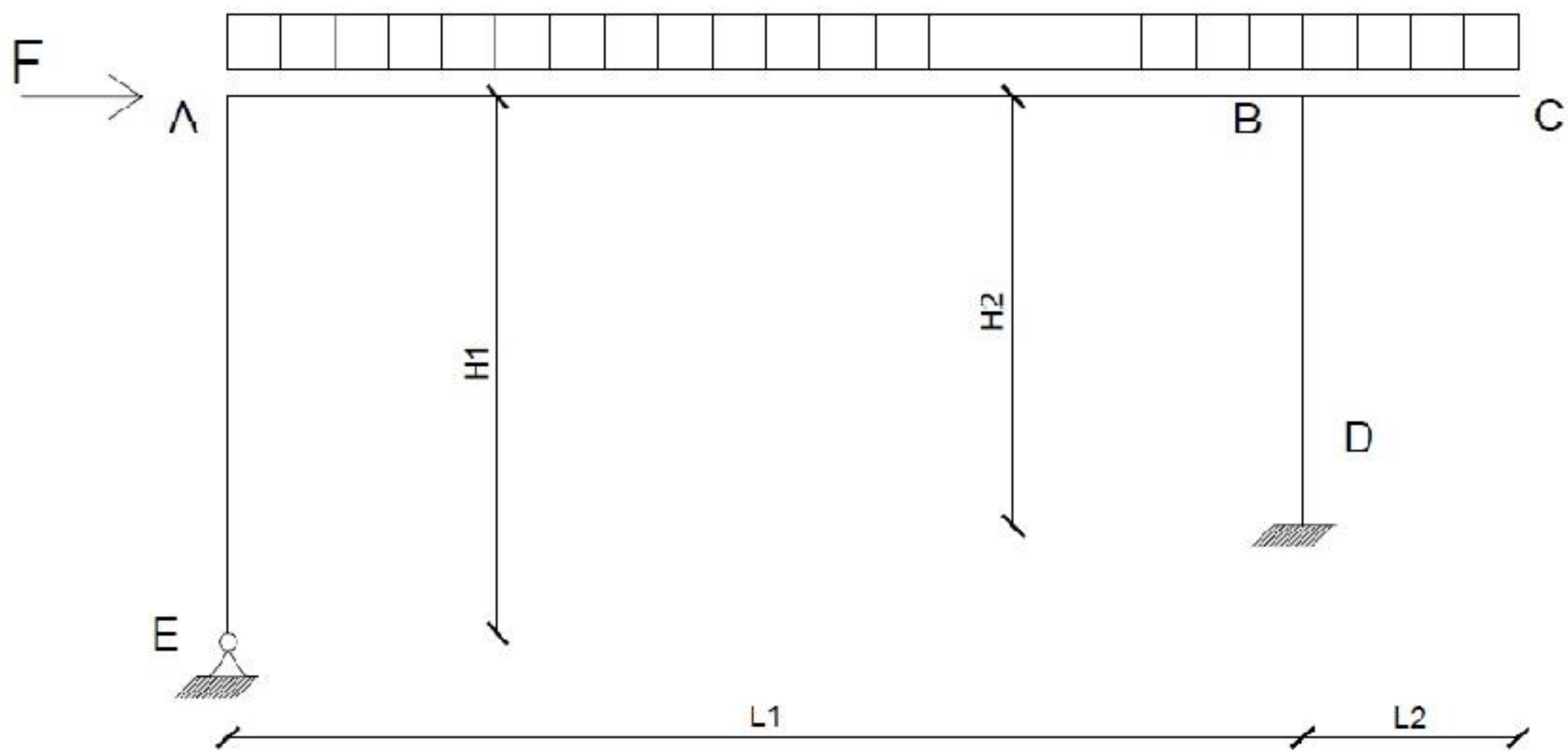
la rigidezza S_{sr} diventa $\mathbf{U_{sr}}$

$$\sum_{1}^{t}\frac{S_{rs}\cdot\varphi_r}{h_{rs}}+\sum_{1}^{t}\frac{S_{sr}\cdot\varphi_s}{h_{rs}}+\sum_{1}^{t^*}\frac{U_{sr}\cdot\varphi_s}{h_{rs}}-\sum_{1}^{t}\frac{(S_{sr}+S_{rs})\cdot\psi_{rs}}{h_{rs}}-\sum_{1}^{t^*}\frac{U_{rs}\cdot\psi_{rs}}{h_{rs}}+\sum_{q+1}^{n}H_q=0$$


q
F
D
E
F
G
I
H
H1
H2
C
A
B
L1
L2
L3
L4
L5


A
B
C
D
E
F
L1
L2
L3
L4


A
B
C
D
H1
H2
E
F
L1
L2
L3


F
A
B
C
H1
H2
D
E
L1
L2