

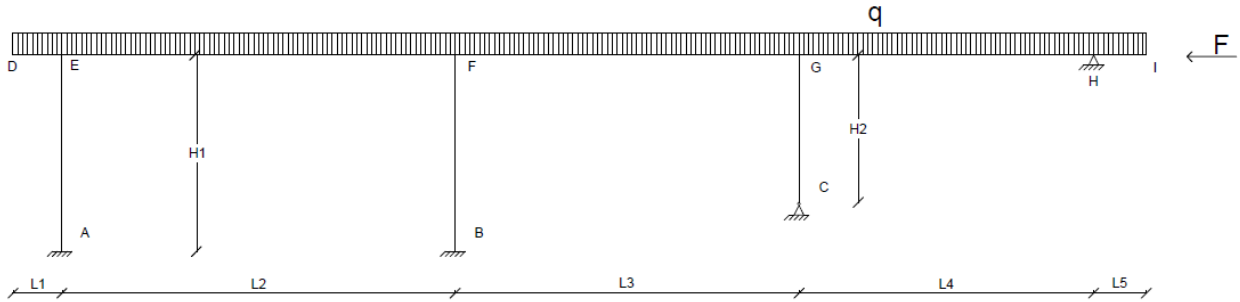
A.A. 2025-2026

C.I. SCIENZA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI

MODULO DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Esercitazione N.4

ESERCIZIO N. 1



DATI:

$$q = 40 \text{ kN/m}$$

$$F = 40 \text{ kN}$$

$$L1 = 1 \text{ m}$$

$$L2 = 8 \text{ m}$$

$$L3 = 7 \text{ m}$$

$$L4 = 6 \text{ m}$$

$$L5 = 1 \text{ m}$$

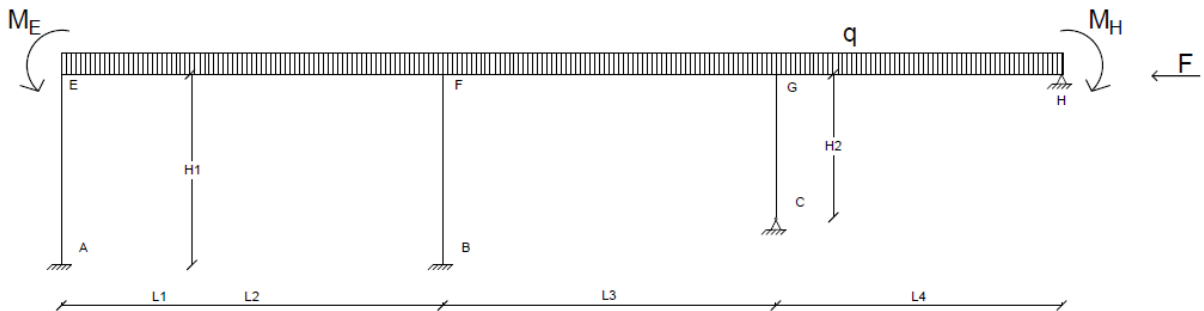
$$H1 = 4 \text{ m}$$

$$H2 = 3 \text{ m}$$

Sezione travi  $0.30 \times 0.70 \text{ m}$  momento di inerzia trave  $JT = 0.30 \cdot 0.70^3/12 = 0.008575 \text{ m}^4$

Sezione pilastri  $0.30 \times 0.30 \text{ m}$  momento di inerzia pilastro  $JP = 0.30 \cdot 0.30^3/12 = 0.000675 \text{ m}^4$

MOMENTI APPLICATI IN SOSTITUZIONE DEGLI SBALZI:

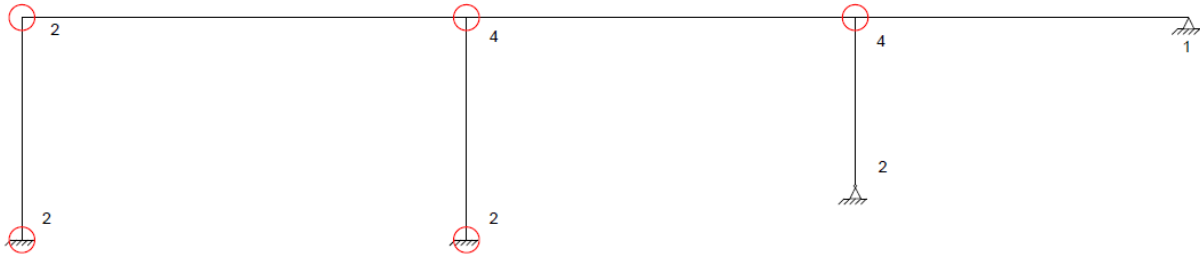


$$M_E = -q \cdot L1^2/2 = -20 \text{ kNm}$$

$$M_H = q \cdot L5^2/2 = 20 \text{ kNm}$$

DETERMINAZIONE DELLE INCOGNITE:

Per determinare se la struttura è a nodi fissi o nodi spostabili i vincoli di continuità vengono sostituiti da cerniere e si valuta se la struttura trasformata è isostatico o ipostatica.



GdL (n. aste = 6):  $3 \cdot 6 = 18$

GdV:  $2+2+2+2+4+4+1 = 17$  IPOSTATICA

Struttura a nodi spostabili, incognite:  $\varphi_E$   $\varphi_F$   $\varphi_G$   $\psi_{AE} = \psi_{BF}$   $\psi_{CG} = H1/H2 \psi_{AE}$

LAVORO PREPARATORIO:

ASTA	EJ/L (kNm)	W (U) (kNm)	V (O) (kNm)	S (U) (kNm)	$\mu_{sx}$ (kNm)	$\mu_{dx}$ (kNm)
AE pilastro	5062.5	20250	10125	30375	-	-
EF trave	32156.25	128625	64312.5	192937.5	-213.333	213.333
BF pilastro	5062.5	20250	10125	30375	-	-
FG trave	36750	147000	73500	220500	-163.333	163.333
CG pilastro	6750	20250	-	20250	-	-
GH trave	42875	128625	-	128625	-170	-

SCRITTURA IN FORMA SIMBOLICA DEL SISTEMA RISOLVENTE:

$$(W_{EA}+W_{EF}) \varphi_E + V_{FE}\varphi_F - S_{EA}\psi_{EA} + \mu_{EF} = M_E$$

$$(W_{FE}+W_{FB}+W_{FG}) \varphi_F + V_{EF}\varphi_E + V_{GF}\varphi_G - S_{FB}\psi_{FB} + \mu_{FE} + \mu_{FG} = 0$$

$$(W_{GF}+U_{GC}+U_{GH}) \varphi_G + V_{FG}\varphi_F - U_{GC}\psi_{GC} + \mu_{GF} + \mu^*_{GH} + 0.5 M_H = 0$$

$$S_{EA}\varphi_E/H1 + S_{FB}\varphi_F/H1 + U_{GC}\varphi_G/H2 - 2 S_{EA}\psi_{EA}/H1 - 2 S_{FB}\psi_{FB}/H1 - U_{GC}\psi_{GC}/H2 - F=0$$

$$\psi_{EA} = \psi_{FB} = \psi \quad \psi_{GC} = \psi \cdot H1/H2$$

Matrice dei coefficienti

$\varphi_E$	$\varphi_F$	$\varphi_G$	$\psi$
148875	64312.5	0	-30375
64312.5	295875	73500	-30375
0	73500	295875	-27000
7593.75	7593.75	6750	-39375

Vettore termini noti

193.3333333

-50

6.666666667

40

OPERATORE IN EXCELL            MATR.PRODOTTO(MATR.INVERSA(matr.coeff);vettore termini noti)

$\varphi_E = 0.001375038$

$\varphi_F = -0.000576799$

$\varphi_G = 0.0000885482$

$\psi_{AE} = \psi_{BF} = -0.000846747$

$\psi_{CG} = H1/H2 \psi_{AE} = -0.001128996$

MOMENTI AI NODI

MAE = VEA  $\varphi_E$  -SAE  $\psi_{AE} = 39.64220544$  kNm

MEA = WEA  $\varphi_E$  -SEA  $\psi_{EA} = 53.56446392$  kNm

MEF = WEF  $\varphi_E$  +VFE  $\varphi_F + \mu_{EF} = -73.5645$  kNm

MFE = WFE  $\varphi_F$  +VEF  $\varphi_E + \mu_{FE} = 227.5747$  kNm

MBF = VFB  $\varphi_F$  -SBF  $\psi_{BF} = 19.8798584$  kNm

MFB = WFB  $\varphi_F$  -SFB  $\psi_{FB} = 14.03976985$  kNm

MFG = WFG  $\varphi_F$  +VGF  $\varphi_G + \mu_{FG} = -241.614472$  kNm

MGF = WGF  $\varphi_G$  +VGF  $\varphi_F + \mu_{GF} = 133.9552$  kNm

MCG = 0kNm

MGC = UGC  $\varphi_G$  -UGC  $\psi_{GC} = 24.65528$  kNm

MGH = UGH  $\varphi_G + \mu_{GH}^* + 0.5 M_H = -158.6105$  kNm

MHG = 20 kNm

1° CONTROLLO

EQUILIBRIO DEI NODI INTERNI

NODO E            MEA + MEF = ME            53.56446392 - 73.5645 = -20

NODO F            MFE + MFG + MFB = 0            227.5747 -241.614472 + 14.03976985 = 0

NODO G            MGF + MGH + MGC = 0            133.9552 - 158.6105 + 24.65528 = 0

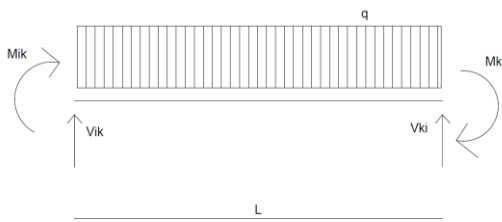
Per valutare la rotazione nell'appoggio H occorre determinare i coefficienti di flessibilità  $\alpha$  e  $\beta$  relativi all'asta GH

$\alpha = 1/3 \cdot L/EJ = 7.77454E-06$

$\beta = - 1/6 \cdot L/EJ = -3.8873E-06$

da cui             $\varphi_H = \alpha \cdot MHG + \beta \cdot MGH - qL^3/(24 EJ) = - 0,00063$

## RISOLUZIONE DELLE ASTE



Per la generica asta per l'equilibrio risulta:

$$V_{ik} = -(M_{ik} + M_{ki})/L + q L/2$$

$$V_{ki} = q L - V_{ik}$$

Equazione del taglio:

$$V_x = V_{ik} - q \cdot x$$

il Taglio è nullo in  $x = V_{ik}/q$  in questa sezione è presente il  $M_{max}$

Equazione del momento flettente

$$M_x = M_{ik} + V_{ik} \cdot x - q x^2/2$$

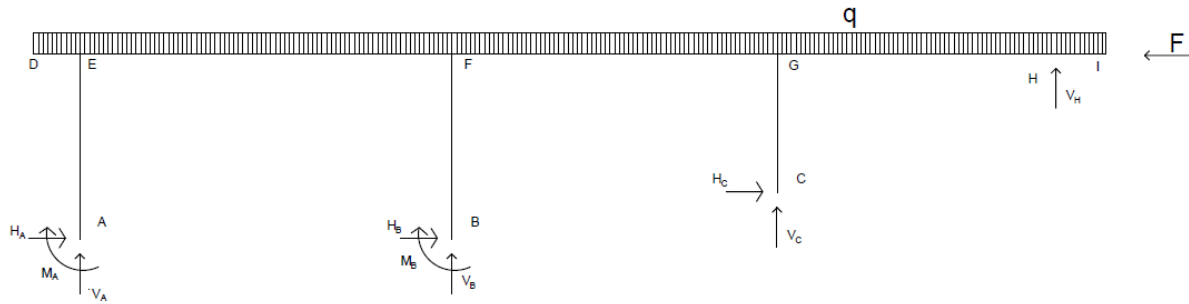
PILASTRO			TRAVE		
ASTA AE			ASTA EF		
MAE	39.64221	kNm	MEF	-73.5645	kNm
MEA	53.56446	kNm	MFE	227.5747	kNm
q	0	kN/m	q	40	kN/m
Lunghezza asta	4	m	Lunghezza asta	8	m
VAE	-23.3017	kN	VEF	140.7487	kN
VEA	23.30167	kN	VFE	179.2513	kN
X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)	X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)
0	-23.3017	39.64221	0	140.7487	-73.5645
0.8	-23.3017	21.00087	1.6	76.74872	100.4335
1.6	-23.3017	2.359538	3.2	12.74872	172.0314
2.4	-23.3017	-16.2818	4.8	-51.2513	141.2294
3.2	-23.3017	-34.9231	6.4	-115.251	8.027346
4	-23.3017	-53.5645	8	-179.251	-227.575
			3.518718006	0	174.0631

PILASTRO	ASTA BF		TRAVE	ASTA FG	
MBF	19.8798584	kNm	MFG	-241.614	kNm
MFB	14.03976985	kNm	MGF	133.9552	kNm
q	0	kN/m	q	40	kN/m
Lunghezza asta	4	m	Lunghezza asta	7	m
VBF	-8.47990706	kN	VFG	155.3799	kN
VFB	8.479907063	kN	VGF	124.6201	kN
X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)	X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)
0	-8.47990706	19.87986	0	155.3799	-241.614
0.8	-8.47990706	13.09593	1.4	99.3799	-63.2826
1.6	-8.47990706	6.312007	2.8	43.3799	36.64923
2.4	-8.47990706	-0.47192	4.2	-12.6201	58.18109
3.2	-8.47990706	-7.25584	5.6	-68.6201	1.31294
4	-8.47990706	-14.0398	7	-124.62	-133.955
			3.884497376	0	60.17193

PILASTRO	ASTA CG		TRAVE	ASTA GH	
MCG	0	kNm	MGH	-158.610484	kNm
MGC	24.65528	kNm	MHG	20	kNm
q	0	kN/m	q	40	kN/m
Lunghezza asta	3	m	Lunghezza asta	6	m
VCG	-8.21843	kN	VGH	143.1017473	kN
VGC	8.218426	kN	VHG	96.89825275	kN
X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)	X (m)	Vx (kN)	Mx (kNm)
0	-8.21843	0	0	143.1017473	-158.61
0.6	-8.21843	-4.93106	1.2	95.10174725	-15.6884
1.2	-8.21843	-9.86211	2.4	47.10174725	69.63371
1.8	-8.21843	-14.7932	3.6	-0.89825275	97.35581
2.4	-8.21843	-19.7242	4.8	-48.8982527	67.4779
3	-8.21843	-24.6553	6	-96.8982527	-20
			3.577543681	0	97.36589

RISOLUZIONE SBALZI					
SBALZO	ASTA DE		SBALZO	ASTA HI	
q	40	kN/m	q	40	kN/m
L	1	m	L	1	m
VED	40	kN	VHI	40	kN
			MHI	-20	kNm
X	Vx	Mx	X	Vx	Mx
0	0	0	0	40	-20
0.5	-20	-5	0.5	20	-5
1	-40	-20	1	0	0

## DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI



I versi delle reazioni sono riportati in figura.

$$V_A = V_{ED} + V_{EF} = 40 + 140.7487 = 180.7487 \text{ kN}$$

$$H_A = V_{AE} = 23.3017 \text{ kN}$$

$$M_A = M_{AE} = 39.64221 \text{ kNm}$$

$$V_B = V_{FE} + V_{FG} = 179.2513 + 155.3799 = 334.6312 \text{ kN}$$

$$H_B = V_{BF} = 8.47990706 \text{ kN}$$

$$M_B = M_{BF} = 19.8798584 \text{ kNm}$$

$$V_C = V_{GF} + V_{GH} = 124.6201 + 143.10175 = 267.72185 \text{ kN}$$

$$H_C = V_{CG} = 8.21843 \text{ kN}$$

$$V_H = V_{HG} + V_{HI} = 96.898253 + 40 = 136.898253 \text{ kN}$$

EQUILIBRIO GLOBALE

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE ORIZZONTALE

$$H_A + H_B + H_C - F = 23.3017 + 8.47990706 + 8.21843 - 40 = 0$$

EQUILIBRIO ALLA TRASLAZIONE VERTICALE

$$V_A + V_B + V_C + V_H - q(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 180.7487 + 334.6312 + 267.72185 + 136.898253 - 40(1+8+7+6+1) = 0$$

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE RISPETTO ALL'ESTREMO D

$$q(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)^2/2 - V_A L_1 - V_B(L_1 + L_2) - V_C(L_1 + L_2 + L_3) - V_H(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - H_A L_1 - H_B L_1 - H_C L_2 + M_A + M_B = 40(1+8+7+6+1)^2/2 - 180.7487 \cdot 1 - 334.6312(1+8) - 267.72185(1+8+7) - 136.898253(1+8+7+6) - 23.3017 \cdot 4 - 8.47990706 \cdot 4 - 8.21843 \cdot 3 + 39.64221 + 19.8798584 = 0$$

AZIONE NORMALE (POSITIVA SE DI TRAZIONE)

$$N_{DE} = 0$$

$$NAE = VA = - 180.7487 \text{ kN}$$

$$NEF = HA = - 23.3017\text{kN}$$

$$NBF = VB = - 334.6312 \text{ kN}$$

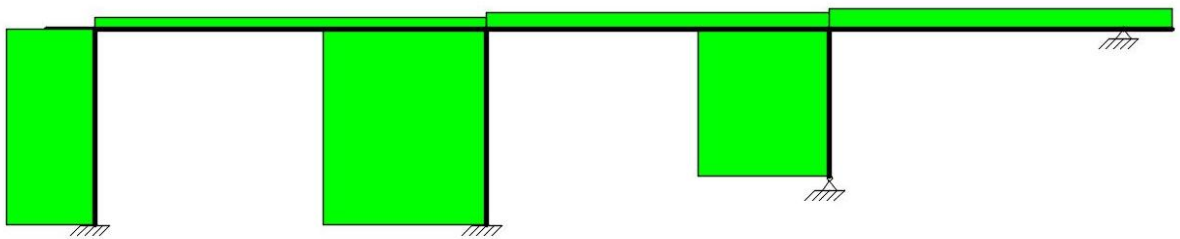
$$NFG = HA +HB = - 23.3017- 8.47990706 = - 31.78160706 \text{ kN}$$

$$NCG = VC = - 267.72185\text{kN}$$

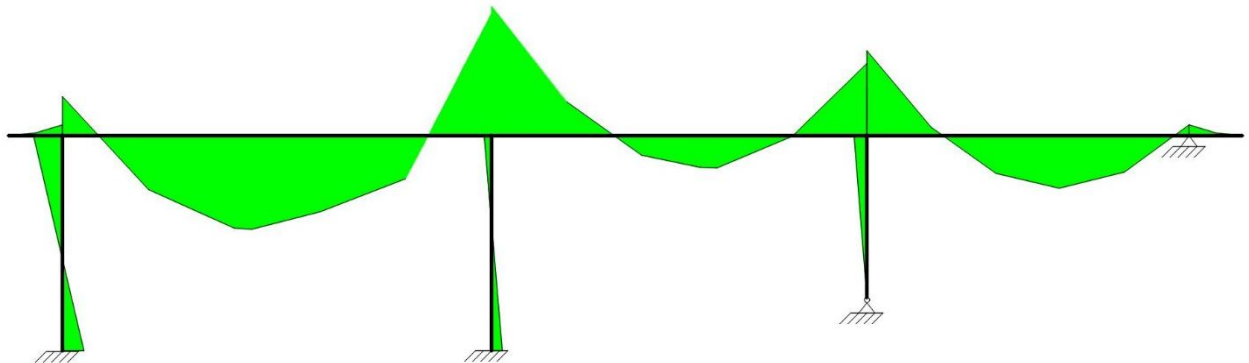
$$NGH = HA +HB +HC = - 23.3017 - 8.47990706-8.21843 = - 40 \text{ kN}$$

DIAGRAMMI DELLE AZIONI INTERNE

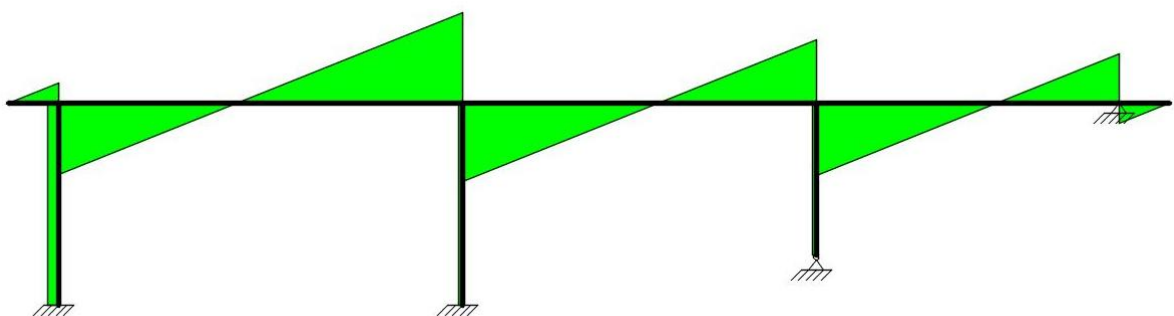
AZIONE NORMALE



MOMENTO FLETTENTE



AZIONE DI TAGLIO



DEFORMATA

